1.

103

CURSO

DE

ARITHMETICA ELEMENTAR

REDIGIDO

CONFORME O ULTIMO PROGRAMMA OFFICIAL

POR

B. ALVES CARNEIRO

Antigo alumno da Eschola Polytechnica; Professor de Mathematica no Collegio Menezes Vieira (desde a sua fundação).

SEGUNDA EDIÇÃO
CORRECTA E AUGMENTADA

RIO DE JANEIRO

B. L. GARNIER — LIVREIRO-EDITOR
71 — Rua do Ouvidor — 71

1880

Todo exemplar desta obra traz a assignatura d
auctor.

Typ. da — **ESCHOLA** — de Serafim José Alves
83 — Rua Sete de Setembro — **83**

PROGRAMMA

para os exames de Arithmetica

	Ns.
oções preliminares; Numeração decimal..........	1 a 35
atro operações sobre numeros inteiros............	36 a 98
acções ordinarias; sua reducção ao mesmo denomi-r e á expressão mais simples..................	158 a 184
erações sobre as fracções ordinarias.............	185 a 198
rações sobre as fracções decimaes................	199 a 218
tema metrico..................................	370 a 378
erações sobre os numeros complexos............	379 a 386
isibilidade dos numeros........................	99 a 157
imas periodicas.................................	225 a 239
adrado e raiz quadrada.........................	240 a 262
o e raiz cubica.................................	263 a 282
uidifferenças e proporções.....................	284 a 309
gra de tres simples e composta.....	393 a 402
gra conjuncta..........	431 a 433
gra de juros simples...........................	403 a 409
gra de descontos..	416 a 423
gra de companhia simples e composta...........	424 a 429
gressões por differença........................	313 a 323
gressões por quociente.........................	324 a 337
garithmos (theoria elementar); uso das taboas.....	338 a 364
os compostos..................................	410 a 415

Ás terças-feiras
8-5-82

ARITHMETICA

NOÇÕES PRELIMINARES

1.—Quando observamos com attenção os corpos escobrimos nelles, independentemente da sua subancia, dous accidentes principaes: *Quantidade* e *Quaade*. Em relação á qualidade vemos os corpos como *sados* ou *leves*, *solidos* ou *liquidos* ou *gazosos*, *quentes* *frios*, *brancos* ou *pretos*, etc.; em relação á quantide os corpos nos-manifestam a idéa de um *conjuncto partes*, capaz de ser augmentado pelo accrescimo de vas partes ou diminuido pela supressão de outras.

QUANTIDADE *é tudo o que for capaz de augmento ou diminuição.*

2.—Applicando aos corpos a idéa de conjuncto de rtes ou quantidade, podemos considerál-os de dous odos: 1.º, *simultaneamente*, querendo conhecer a *toidade* dos que se-acham ao nosso alcance; 2.º, *indiidualmente*, querendo conhecer o *logar*, fixo ou suc- da um delles occupa no espaço. Dahi

Quantidade descontinua *é um todo cujas partes estão separadas umas das outras.* A propriedade caracteristica da quantidade descontinua consiste em não podermos augmentál-a ou diminuil-a de menos que *um* dos corpos que se-considera.

Quantidade continua *é um todo cujas partes acham-se intimamente unidas umas ás outras.* A propriedade caracteristica da quantidade continua está en podermos augmentál-a ou diminuil-a de *tão pouc* quanto nos-aprouver.

3.—Conhecer o valor de uma quantidade é sabe *quantas partes* ella contem (n. 1) ou o modo como ell se-compõe com a unidade; dando-se, porém, a alternativa de ser uma quantidade, ou descontinua, ou continua (n. 2), consideremos separadamente este dous casos.

Se a quantidade for descontinua, visto-que a partes (corpos) a que ella se-refere estão separadas bastará *contar* a totalidade destas, isto é, junctar men talmente a uma dellas cada uma das restantes: dá-se qualquer dos corpos que se-conta a denominação gene rica de *unidade*, e a cada totalidade o nome commu de *numero*.

Se a quantidade for continua, como não se-achar separadas as partes que a-constituem, não é possiv contál-as; mas podemos sempre, entre as quantidade da mesma natureza que a proposta, escolher uma considerál-a como *parte* da quantidade que se-pretend avaliar.

Neste caso é necessario *medir* a qu[illegible]
[illegible] é, determinar *quantas* [illegible]

esta ultima quantidade a denominação de *unidade*, e a expressão do modo por que ella se-contem na proposta chama-se *numero*.

Unidade *é toda quantidade que serve para avaliar outras quantidades da mesma especie que ella, ou das quaes ella faz parte.*

Numero *é a expressão do modo como uma quantidade se-compõe com a respectiva unidade.*

4.—O numero, quando representa o valor de uma quantidade descontinua, tem uma fórma particular em virtude da qual se-lhe-attribue a qualificação de *inteiro*; porém, quando elle exprimir o valor de uma quantidade continua, duas circumstancias principaes é possivel darem-se:

1.ª *A quantidade contem a unidade numero exacto de vezes.*—Neste caso o numero tem a fórma inteira (como se a quantidade fosse descontinua).

2.ª *A quantidade não contem a unidade numero exacto de vezes.*—Neste caso, visto-que a unidade é inteiramente arbitraria, poder-se-hia escolhêl-a de modo que ella se-contivesse numero exacto de vezes na quantidade a medir (e assim recahia-se no caso precedente); todavia, sendo, muitas vezes, necessario conservar a unidade que a principio se-escolheu, divide-se esta em partes eguaes e indaga-se quantas dessas partes a quantidade contem: o valor da quantidade exprime-se, então, por um numero que tem a fórma denominada *fraccionaria*.

Numero inteiro *é aquelle que resulta da avaliação de uma quantidade que contem exactamente a unidade respectiva.*

Numero fraccionario *é aquelle que resulta da avaliação de uma quantidade que não contem exactamente a unidade á qual queremos referil-a* (*)

5.—Quando ao nome de um numero accrescentamos a designação da unidade, a expressão resultante nos-mostra, por assim o-dizer, o *tamanho* da quantidade avaliada; por tal motivo parece que essa expressão deverá denominar-se GRANDEZA. E', pelo menos, neste sentido que usualmente se-diz: a *grandeza do raio terrestre*, etc.

6.—Até aqui temos supposto que, para avaliar uma quantidade, se-compara immediatamente esta com a respectiva unidade; entretanto, nem sempre (e, até, raras vezes) é possivel essa comparação; como, por exemplo, quando a quantidade que se-pretende avaliar se-acha em posição tal que não se-lhe-possa applicar a unidade. Nos casos, pois, em que a comparação immediata da quantidade com a unidade for impossivel ou, pelo menos, muito difficultosa, torna-se indispensavel, para ter o valor dessa quantidade, comparál-a com outra ou outras de que ella dependa. Daqui se-infere que existem dous modos de avaliar quantidades: *directo* e *indirecto*.

Avaliação directa *é a comparação immediata de uma quantidade com a respectiva unidade.*

Avaliação indirecta *é a comparação de uma quantidade com a sua unidade por intermedio de outra ou outras quantidades que se-saiba avaliar e das quaes a proposta dependa.*

(*) A qualificação de *fraccionario* dada a um numero lembra a circumstancia de ser necessario, para formar esse numero, dividir a unidade em *partes eguaes*, pois-que *fracção* quer dizer *parte* da unidade.

Relação (em geral) *é o modo como uma quantidade depende de outra ou de outras.*

Mathematica *é a sciencia* (*) *que tem por objecto a avaliação indirecta das quantidades.*

7.—Não se-póde avaliar indirectamente uma quantidade sem conhecer com antecedencia, 1.°, as relações que prendem essa quantidade com outras, por meio das quaes queremos determinál-a, e 2.°, os valores numericos destas quantidades (n. 6): combinados entre si estes valores por meio daquellas relações, ter-se-ha o valor numerico da quantidade proposta e, portanto, a sua grandeza (n. 5). Dos differentes processos mediante os quaes effectuamos todas as combinações de numeros, forma-se a sciencia que recebeu a denominação de *Arithmetica* (**).

Arithmetica *é a parte da Mathematica que tem por objecto descobrir como se-effectua qualquer combinação entre numeros dados.*

8.—A utilidade da Arithmetica está baseada, não sómente nas continuadas applicações que se-faz della para satisfazer urgentes necessidades da vida material, mas tambem no auxilio que esta sciencia presta ao desenvolvimento da vida intellectual. Se, num momento dado, os conhecimentos arithmeticos deixassem de existir, o edificio da Mathematica ficaria arruinado; e na verdade, esta ultima sciencia, cujo objecto definitivo é a avaliação indirecta das quantidades (n 6), não póde dispensar o adjutorio de uma sciencia que, como a

(*) Vej. adeante, n. 71.

(**) *Ampère* (A.—M.) designou, creio que com mais propriedade, esta sciencia pelo nome de *Arithmographia* (do grego—*arithmos*, numero—, e —*grapho*, eu escrevo—.)

Arithmetica, tem por fim immediato calcular valores de quantidades.

9.—*Advertencia.*—De duas partes constará este nosso trabalho : *Calculo arithmetico* e *Applicações*. Na primeira parte (que é, propriamente, a Arithmetica) tractaremos das differentes combinações de numeros; na segunda occupar-nos-hemos com a resolução de questões cujo conhecimento é indispensavel em todos os ramos da actividade humana.

2-5-88

PRIMEIRA PARTE

Calculo Arithmetico

INTRODUCÇÃO

NUMERAÇÃO DECIMAL

10.—O objecto do calculo arithmetico é (n. 9) descobrir como se-effectua qualquer combinação entre numeros dados ;porém, antes de entrar neste assumpto, é absolutamente indispensavel que façamos conhecer os *nomes* dos numeros e bem assim os *signaes* com que, para maior simplicidade, se-costuma representál-os. A creação destes nomes e destes signaes pertence á *Numeração*. Por ora nos-occuparemos sómente da numeração dos numeros inteiros : em logar proprio mostraremos como desta numeração depende a dos numeros fraccionarios.

11.—Independentemente de qualquer convenção particular, *todo numero inteiro se-concebe como formado pela aggregação successiva da unidade*; assim, pois, se imaginarmos que, começando por *um* (nome generico da unidade), se-vai junctando successivamente uma unidade ao ultimo numero formado, como nada ha

que possa impedir a continuação indefinida de simelhante operação, comprehenderemos facilmente a existencia de uma *infinidade de numeros inteiros*. Ora, no caso em que fossemos obrigados a crear, para exprimir cada numero inteiro, um nome e um signal especiaes, ver-nos-hiamos na imperiosa necessidade de entregar á memoria uma infinidade de palavras e de signaes (o que não é possivel), ou de renunciar ao estudo do calculo arithmetico (o que tambem não póde ser). Das considerações que precedem conclue-se que é indispensavel procurar *um meio de exprimir todos os numeros inteiros possiveis com um systema* (*) *limitado de palavras e de signaes.*

Numeração (em geral) *é a parte da Arithmetica onde se-estuda os meios de exprimir todos os numeros possiveis com um systema limitado de palavras e de signaes.*

12.—Tendo em vista o objecto da numeração no caso especial dos numeros inteiros, attribuiu-se aos primeiros numeros formados nomes e signaes inteiramente arbitrarios: combinando entre si, de certo modo, esses nomes e signaes conseguiu-se descobrir a expressão, quer oral, quer escripta, de todos os numeros possiveis. Toda a difficuldade da numeração está, portanto, em saber como se-ha de combinar os nomes e os signaes arbitrarios.

Systema de numeração *é o conjuncto dos nomes e signaes arbitrarios e das convenções indispensaveis para exprimir todos os numeros.*

(*) *Systema* quer dizer uma reunião de cousas consideradas collectivamente.

Ha infinitos systemas de numeração (*), pois-que podemos considerar como dados o primeiro numero (a unidade), ou os dous primeiros, os tres primeiros, etc., numeros, indifferentemente.

13.—Segundo a definição que démos da numeração (n. 11), tem esta parte da Arithmetica um duplo fim: 1.º *formar palavras*, 2.º *formar signaes*. Dahi resulta que a uumeração se-divide naturalmente em duas partes distinctas: *Numeração falada* ou nomenclatura, e *Numeração escripta* ou escriptura.

§ 1.º—Numeração falada

14.—A Numeração falada *tem como objecto formar os nomes de todos os numeros possiveis, empregando, para isso, um systema limitado de palavras arbitrarias.*

15.—As palavras arbitrarias que se-tomou como ponto de partida, foram

um, dous, tres, quatro, etc.,

num systema indeterminado;

um,

no systema binario (vej. n. 12, nota);

um, dous,

no systema ternario;

. . . .

um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove,

no systema decimal.

(*) Os principaes são os seguintes: *binario, ternario, quaternario, quinquenario, sexnario, septenario, octonario, novenario, decenario* (decimal), *undecenario* e *duodecenario*; o systema decimal é o que se-acha universalmente adoptado.

16.—Depois de admittido um dado systema de nomes arbitrarios, sómente restava descobrir um modo qualquer de combinar entre si esses nomes (n. 12), afim de exprimir todo e qualquer numero, por maior que elle seja. Nesse intuito suppoz-se que *o numero formado pelo maior numero de nome arbitrario augmentado de uma unidade* fosse considerado como *unidade de segunda ordem*, que *o mesmo numero de unidades de segunda ordem* constituisse uma *unidade de terceira ordem*; e assim por deante. Donde resulta a seguinte

Convenção 1.ª—*Um certo numero* (maior numero de nome arbitrario augmentado de uma unidade) *de unidades de uma ordem constitue uma unidade da ordem seguinte.*

Base de um systema de numeração *é o numero de unidades de uma ordem com que se-forma uma unidade da ordem immediatamente superior.*

17.—Tomemos agora um *numero qualquer*, maior do que a base do systema que se-considera: se do numero supposto tirarmos todas as unidades de segunda ordem ficará, em geral, um determinado numero de unidades de primeira ordem (menor do que a base); se do numero das unidades de segunda ordem tirarmos todas as unidades de terceira ordem, fica, em geral, um dado numero de unidades de segunda ordem (tambem menor do que a base); e assim por deante. Continuando a mesma operação até ficar um numero de unidades de certa ordem menor que a base, achar-se-ha decomposto o numero que se-imaginou em grupos de unidades de differentes ordens. Do exposto se-deduz a seguinte

Convenção 2.ª—*Todo numero é formado por um ou mais grupos de unidades de diversas ordens, cada um menor do que a base do systema de numeração adoptado.*

18.—As convenções estabelecidas (ns. 16 e 17) são sufficientes para se-conseguir formar o nome de qualquer numero. Com effeito:—*se enunciarmos separadamente cada um dos grupos de unidades que compõem um numero* (conv. 2.ª), *este ficará perfeitamente conhecido;* e *para formar o nome de um grupo de unidades de qualquer ordem é evidente que basta, por meio de uma terminação adequada, indicar essa ordem.*—A enunciação de um numero tornar-se-ha ainda mais simples quando agruparmos duas a duas, tres a tres, etc., as ordens que o-constituem: então será bastante formar os nomes das ordens de um grupo qualquer e inventar um designativo para cada um dos grupos.

19.—Systema decimal de numeração *é aquelle que tem por base o numero* dez.

Sendo este systema de numeração o universalmente adoptado, occupemo-nos delle em particular.

20.—As palavras formadas arbitrariamente para servirem de ponto de partida no systema decimal são, como já vimos (n. 15), *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito* e *nove*.

As convenções 1.ª e 2.ª, particularizadas para o systema decimal, reduzem-se ás que seguem:

Convenção 1.ª—*Dez unidades de qualquer ordem constituem uma unidade da ordem seguinte.*

Convenção 2.ª—*Todo numero é formado por um*

ou mais grupos de unidades de diversas ordens, cada um menor do que dez.

Vejamos como, mediante os nove nomes arbitrarios e as duas convenções, é possivel enunciar todos os numeros.

21.—Junctando uma unidade ao numero *nove* (maior numero de nome arbitrario), forma-se um numero a que se-deu o nome *dez* e que se-considera como uma unidade de segunda ordem (conv. 1.ª, particularizada) : a segunda ordem denomina-se *dezena.*

Conta-se as dezenas como se-contou as unidades (simples) :

uma, duas, ... *nove,* dezenas ;

ora, adoptando a terminação *enta* para indicar que se-tracta de dezenas (n. 18), teremos os nomes seguintes :

uma-enta, duas-enta, ...*nove-enta,*

que significam, respectivamente,

uma dezena, duas dezenas,. . . . . *nove dezenas.*

Observação.—Aos nomes *uma-enta, duas-enta, tres-enta,* o uso preferiu *dez, vinte, trinta* (derivados do latim—*decem, viginti, triginta*). Os outros nomes foram conservados, embora depois de leves modificações.

Entre dous grupos consecutivos de dezenas existem nove numeros, que se-compõem de *dezenas* e *unidades ;* ter-se-ha o nome de cada um desses numeros enunciando separadamente o nome das dezenas e o das unidades (n. 18), pela fórma que segue :

dez e um (uma dezena e uma unidade),

dez e dous (uma dezena e duas unidades),

. . . .

dez e nove (uma dezena e nove unidades),

vinte e um (duas dezenas e uma unidade),

vinte e dous (duas dezenas e duas unidades),

. . . .

vinte e nove (duas dezenas e nove unidades),

. . . .

noventa e um (nove dezenas e uma unidade),

noventa e dous (nove dezenas e duas unidades),

. . . .

noventa e nove (nove dezenas e nove unidades).

Observação.—Os nomes dos cinco primeiros numeros comprehendidos entre *dez* e *vinte* foram, abusivamente, trocados nos seguintes : *onze, doze, treze, quatorze* e *quinze* ; a irregularidade, nos nomes dos quatro ultimos daquelles numeros, apenas consiste em reunir palavras que se-deveria enunciar separadamente.

22. —Junctando uma unidade ao numero *noventa e nove* forma-se um numero que se-denomina *cem* e que é equivalente a—*nove dezenas* mais *nove unidades* mais *uma unidade*—, ou—*nove dezenas* mais *uma dezena*—, ou—*dez dezenas*—. O numero *cem* deve ser, pois, considerado como uma unidade de terceira ordem (conv. 1.ª particularizada), que tem o nome de *centena.*

Conta-se as centenas como se-contou as unidades simples :

uma, duas, ...*nove,* centenas ;

ora, admittindo como terminação a palavra *cento* pa
mostrar que se-tracta de centenas (n. 18), ter-se-ha o
seguintes nomes :

um-cento, dous-centos, ... *nove-cento*

que significam, respectivamente,

uma centena, duas centenas,........... *nove centenas*

Alguns dos nomes precedentes têm sido hab
tualmente modificados : *duzentos* (dous-centos), *tresento*
(tres-centos), *quinhentos* (cinco-centos). A palavra *cent*
usa-se, no mesmo sentido que *cem*, para os numer
comprehendidos entre cem e duzentos ; e quanto a
nomes que se-conservaram é costume escrevêl-os se
traço de união, assim : *quatrocentos*.

Entre dous grupos consecutivos de centenas existe
noventa e nove numeros, que se-compõem de *centena*
e *unidades*, ou de *centenas* e *dezenas*, ou de *centenas*
dezenas e *unidades*; obtem-se o nome de cada u
desses numeros enunciando em separado as partes qu
o-constituem (n. 18) :

cento e um (uma centena e uma unidade),
cento e dous (uma centena e duas unidades),

. . . .

cento e nove (uma centena e nove unidades),
cento e dez (uma centena e uma dezena).
cento e vinte (uma centena e duas dezenas),

. . . .

cento e noventa (uma centena e nove dezenas),

. . . .

. . . .

nove centos e noventa e nove (nove centenas, nove dezenas e nove unidades).

23.—Até aqui conseguimos formar os nomes de novecentos e noventa e nove numeros, empregando apenas nove palavras arbitrarias e duas terminações designativas de ordens (*enta* e *cento*) Poderiamos, evidentemente, continuar do mesmo modo a formação dos nomes que exprimem os seguintes numeros, inventando para cada ordem nova uma terminação especial ; mas, no intuito de tornar mais simples e, por isso, mais facil a nomenclatura dos numeros, agrupou-se as diversas ordens de unidades *tres a tres* (n. 18), e cada um desses grupos recebeu o nome de *classe* ou *ordem ternaria* (por encerrar *tres* ordens simples). Deste modo fica o nosso trabalho reduzido a formar os nomes que designam as classes : accrescentando o nome de cada classe ao das centenas, dezenas e unidades simples que a-constituem, chegou-se a formar o nome de qualquèr numero, por mais classes que elle encerre.

24.—Os nomes designativos das classes de que póde constar um numero são : *unidade* (simples), *milhar*, *milhão, bilhão, trilhão, quatrilhão, quintilhão*, etc.

Um milhar é equivalente a—*nove centenas* mais *nove dezenas* mais *nove unidades* mais *uma unidade*—, ou—*nove centenas* mais *nove dezenas* mais *uma dezena*—, ou—*nove centenas* mais *uma centena*—, ou, por fim—, *dez centenas*.—A este numero constituido por dez centenas deu-se o nome *mil*, e considerou-se-o como formando uma unidade de quarta ordem (conv. 1.ª, particularizada) que se-denominou *milhar*.

Um milhão é equivalente a *mil milhares* ; um

bilhão é equivalente a *mil milhões*; um trilhão vale—*mil bilhões*; e assim por deante.

25.—Uma vez que se-sabe (conforme o exposto nos ns. 20, 21 e 22) formar o nome de qualquer grupo de unidades, de dezenas e de centenas, facilmente se-comprehende, á vista da tabella que segue, todo o mechanismo da numeração falada:

Unidade
Dezena } de *unidades* (simples) . . 1.ª classe
Centena

Unidade
Dezena } de *milhar*. . . . . 2ª classe
Centena

Unidade
Dezena } de *milhão* . . . . 3.ª classe
Centena

Unidade
Dezena } de *bilhão*. . . . . 4.ª classe
Centena

. . . .

§ 2.º—Numeração escripta

26.—Embora a nomenclatura dos numeros seja simples e facil, não é ella, comtudo, sufficiente por duas principaes razões: 1.ª, *Querendo-se combinar numeros consideraveis, mui difficultosa seria a combinação dos respectivos nomes*; 2.ª, *Tendo cada povo palavras especiaes para exprimir suas idéas, não seriam os numeros, expressos apenas por seos nomes, entendidos por todos os povos*.

Estas duas desvantagens desapparecem com a creação de um systema de signaes muito simples que, combinados entre si de certo modo, possam representar todos os numeros imaginaveis.

A Numeração escripta *tem como objecto formar os signaes representativos de todos os numeros empregando, para esse fim, um systema limitado de signaes simples e arbitrarios*.

27.—O signaes simples e arbitrarios que se-adoptou para representar todos os numeros foram

1, 2, 3, 4, etc.

num systema de numeração indeterminado;

1,

no systema binario;

1, 2,

no systema ternario;

. . . .

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

no systema decimal.

Estes signaes simples denominaram-se *algarismos*.

28.—Supposto um determinado systema de algarismos, era necessario, para se-poder com elles representar todos os numeros possiveis, que se-descobrisse um meio qualquer de combinar entre si esses algarismos. Ora, visto-que todo numero se-considera como formado por grupos de unidades de diversas ordens, cada um menor do que a base do systema de numeração que se-adopta (conv. 2.ª, n. 17), o nosso fim estará conse-

guido no momento em que 1.°, representarmos pelos algarismos convencionaes os diversos grupos possiveis de unidades, e 2.°, admittirmos que cada ordem seja indicada pelo *logar* que um algarismo occupa, a contar da direita. A segunda convenção (n. 17) é, pois, o fundamento de toda a numeração escripta. Admittiu-se, portanto, esta

Convenção.—*Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades de ordem immediatamente superior á que compete a esse outro.*

29.—Em consequencia da precedente convenção cada algarismo fica tendo dous valores, um dependente da sua *fórma* e o outro dependente do *logar* que elle occupa no numero.

Valor absoluto *é aquelle que um algarismo tem por causa da sua fórma.*

Valor local (ou relativo) *é aquelle que um algarismo tem segundo o logar que occupa.*

30.—Podendo acontecer que não haja em um numero unidades de certa ordem, foi necessario crear um signal *sem valor proprio*, o qual, occupando uma determinada ordem, ao mesmo tempo indicasse falta de unidades dessa ordem e fizesse os outros algarismos da esquerda occuparem seos logares respectivos. Este signal é 0 (zero).

Os algarismos necessarios para exprimir todos os numeros em qualquer systema são, pois, de duas especies: *significativos* e *insignificativo*, conforme esses algarismos têm valor proprio ou não o-têm.

31.—Appliquemos agora ao systema decimal as noções geraes que precedem.

Os algarismos arbitrarios empregados neste systema de numeração vem a ser (n. 27)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

os quaes exprimem, respectivamente, os numeros

um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove;

o algarismo insignificativo é, como em todos os systemas, o *zero*.

A convenção feita no n. 28, particularizada para o systema decimal, dá logar a est'outra

Convenção.—*Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores que as desse outro.*

Mostremos como, por meio dos dez algarismos e da convenção estabelecida, é possivel representar todos os numeros.

32.—Se o numero que se-pretende representar por algarismos não contiver mais de nove unidades, podemos exprimil-o por um dos nove algarismos significativos.

Para exprimir qualquer numero de dezenas menor do que dez, como a dezena é unidade de *segunda ordem*, bastará representar por um dos algarismos significativos o numero absoluto das dezenas e collocar (n. 31, conv.) esse algarismo em *segundo logar*, a partir da direita: o que se-consegue escrevendo *zero* no logar das unidades simples (n. 30).

Para exprimir qualquer numero de centenas menor que dez, como a centena é unidade de *terceira ordem*, é bastante representar por um dos algarismos significativos o numero absoluto das centenas e collocar (n. 31, conv.) esse algarismo em *terceiro logar*, a contar da di-

reita : e isto se-consegue escrevendo *dous zeros*, um n logar das unidades simples e outro no das dezena (n. 30).

Em geral : para exprimir um numero que const de unidades simples, dezenas, centenas, etc., será suffi ciente 1.°, representar por um dos algarismos signi ficativos o numero absoluto das unidades simples, o da dezenas, o das centenas, etc., e 2.°, collocar cada u dos algarismos no seo logar respectivo (n. 31) ; e n caso em que o numero proposto não contenha unidade de uma certa ordem, escrever-se-ha *zero* no logar dessa unidades (n. 30).

Ora, uma vez que todo numero maior do que *de* se-concebe decomposto em grupos de unidades de di versas ordens, cada um menor que dez, e desde-que sa bemos representar por algarismos todos os grupos pos siveis de unidades de qualquer ordem, não ha numer nenhum que não possa ser expresso mediante o empre dos dez signaes e da convenção exposta no n. 31.

33.—Tendo-se até aqui aprendido a exprim qualquer numero por meio de algarismos, vai-se re sumir tudo o que se-expoz mostrando 1.°, como se lê um numero que se-acha expresso por algarismo e 2.°, como se-escreve um numero quando este f enunciado.

Regra para ler um numero.—*Divide-se o numer começando pela direita, em classes de tres algarismo e lê-se cada classe, da esquerda para a direita, dando-ll a competente denominação.*

Regra para escrever um numero.—*Escreve-s começando pela esquerda, as centenas, as dezenas e unidades de cada classe : as centenas, as dezenas ou*

unidades, que faltarem nalguma classe substituem-se por zeros.

Exemplos

Ler os numeros que seguem :

1.°—852897.

Resposta :—*Oitocentas e cincoenta e duas* mil, *oitocentas e noventa e sete* unidades.

2.°—304085.

Resposta :—*Tresentas e quatro* mil, *oitenta e cinco* unidades.

Escrever os numeros seguintes .

1.°—*Quatro* milhões, *tresentos e oitenta e cinco* milhares (mil), *novecentas e setenta e seis* unidades.

Resposta :—4385976.

2.°—*Setenta* milhões, *quatro centos e cinco* milhares, *novecentas e quarenta e tres* unidades.

Resposta :—70405943.

34.—Um numero inteiro, attendendo-se aos algarismos com que elle se-escreve, póde ser *simples* ou *composto*.

Numero simples *é aquelle que se-escreve com um só algarismo ;* como 5, 8, 3.

Numero composto *é aquelle que se-escreve com dous ou mais algarismos* ; por exemplo 20, 723, 802, etc.

35.—Terminado o estudo da numeração dos numeros inteiros, passemos já a tractar das diversas combinações que se-póde effectuar com estes numeros.

LIVRO I

OPERAÇÕES FUNDAMENTAES

SOBRE

Numeros inteiros

CAPITULO I

OPERAÇÕES

36.—Operação arithmetica *é o modo de combinar entre si dous ou* (excepcionalmente) *muitos numeros.*

E' facil de ver que *são tantas as operações arithmeticas quantos forem os modos distinctos de combinar entre si dous numeros*; porém, entre as operações arithmeticas possiveis existem quatro que servem de *fundamento* a todas as outras: são ellas, por isso, chamadas operações fundamentaes.

37.—As operações fundamentaes são as quatro seguintes:

Addição, Subtracção, Multiplicação, Divisão.

Vamos, por ora, ensinar como se-effectua estas operações sobre numeros inteiros.

§ 1.º—Addição

38.—Addição *é a operação que tem por fim reunir em um numero unico as unidades de dous ou mais numeros dados.* (*)

(*) A addição é a unica operação arithmetica em que, de uma só vez, se-combina mais de dous numeros. (Vej. n. 36).

Os numeros dados chamam-se *parcellas*, e o numero procurado é a *somma*.

39.—Uma vez que a somma de dous ou mais numeros deve conter todas as unidades desses numeros (n. 38), é evidente que poderemos obtêl-a—addicionando á primeira parcella cada unidade da segunda; addicionando á primeira somma cada unidade da terceira parcella; addicionando á segunda somma cada unidade da quarta parcella; e assim por deante, até haver considerado todas as parcellas.—Porém, quando os numeros dados fossem compostos de muitas unidades, a operação, feita como agora indicamos, seria extremamente longa: vamos, portanto, descobrir um processo pelo qual se-possa addicionar quaesquer numeros com a maxima rapidez possivel.

Para attingirmos o nosso fim mostraremos 1.º, como se-faz a addição de *numeros simples*; 2.º, como se-reduz ao precedente caso a addição de *numeros compostos*.

40.—1.º Caso: *addição de numeros simples.*—Sejam dados dous numeros simples quaesquer, 4 e 5 por exemplo: não temos outro meio de fazer a somma destes numeros senão o indicado no n. 39. Junctando a 4 cada unidade de 5, diremos: 4 *mais* 1 *são* 5; 5 *mais* 1 *são* 6; 6 *mais* 1 *são* 7; 7 *mais* 1 *são* 8; 8 *mais* 1 *são* 9; ou, mais simplesmente, 4 *mais* 1, 5 *mais* 1, 6 *mais* 1, 7 *mais* 1, 8 *mais* 1, 9. A somma pedida é 9.

Sejam dados agora mais de dous numeros simples: por exemplo 5, 8, 7, e 9. Junctando a 5 cada unidade de 8, acha-se 13; junctando (n. 39) a esta primeira somma cada unidade de 7, obtem-se 20; junctando, finalmente, a 20 cada unidade de 9, acha-se 29, que é a somma procurada.

Com a repetição de addições como as precedentes

adquire-se o habito de as-effectuar com presteza. Na práctica diz-se, v. g., 5 *mais* 8, 13 *mais* 7, 20 *mais* 9, 29.

41.—2.°Caso: *addição de numeros compostos.*— Supponhamos que se-pretende addicionar os numeros 4782, 3195 e 4072. Uma somma deve constar de todas as unidades contidas nas parcellas (n. 38); porém, sendo estas parcellas numeros compostos e estando, por isso, as unidades de cada uma distribuidas em grupos, menores que 10, de unidades simples, dezenas, etc. (n. 20, conv. 2.ª), resulta dahi que a somma deve encerrar todas as unidades simples, todas as dezenas, etc. das parcellas.

A somma das unidades simples contidas nas parcellas é 9 (n. 40); e como não se-póde, com estas 9 unidades simples, formar nenhuma dezena (n. 20, conv. 1.ª), segue-se que 9 é o numero exacto das unidades simples da somma pedida.

A somma das dezenas que se-contêm nas parcellas é 24 (n. 40); mas, visto-que 24 dezenas valem o mesmo que 4 dezenas e 2 centenas (n. 20, conv. 1.ª), conclue-se que o numero exacto das dezenas da somma que se-procura é 4, devendo as 2 centenas concorrer para a formação das centenas que deve conter a mencionada somma. Estas 2 centenas chamam-se *reserva*.

A somma das centenas contidas nas parcellas, augmentada com as 2 centenas que vem, como reserva, da somma precedente, dá 10 (n. 40); mas, como 10 centenas valem exactamente 1 milhar (n. 20, conv. 1.ª), segue-se que na somma pedida não ha centenas: escreve-se, pois, 0 (zero) no logar das centenas (n. 30) e guarda-se 1 milhar para a somma seguinte.

A somma dos milhares de que se-compõem as

parcellas, augmentada com a reserva de 1 milhar, dá 12 (n. 40); estes 12 milhares valem 2 milhares e 1 dezena de milhar, a qual se-deveria junctar ás unidades desta ordem que houvesse nas parcellas: não havendo, porém, dezenas de milhar nos numeros dados, escreve-se os algarismos 2 e 1 nos seos logares competentes.

Vê-se, pelo que precede, que a somma pedida consta de 9 unidades simples, 4 dezenas, 0 centenas, 2 milhares e 1 dezena de milhar: é, pois, esta somma egual a 12049.

Para mais facilmente se-formar cada uma das sommas parciaes, é conveniente que se-achem numa mesma linha vertical os algarismos de cada somma. Eis a disposição do calculo:

$$\begin{array}{r} 4782 \\ 3195 \\ 4072 \\ \hline 12049 \end{array}$$

Regra (*).—*Escreve-se as parcellas umas por baixo das outras de modo que fiquem unidades simples por baixo de unidades simples, dezenas por baixo de dezenas, etc., e sublinha-se a ultima parcella. Somma-se, começando pela direita, os algarismos de cada linha vertical: se uma somma parcial exceder a 9, escreve-se no respectivo logar sómente as unidades della e guarda-se mentalmente as suas dezenas para addicionál-as á somma parcial seguinte.*

42.—Observação.—Principia-se pela direita uma addição de numeros compostos por causa da reserva que é necessario transportar da somma de uma linha

(*) Vej. adeante, n. 73.

vertical para a da linha vertical que lhe-fica á esquerda; no caso, porém, em que não houvesse reservas, seria indifferente começar pela direita ou pela esquerda. Póde-se, entretanto, principiar a addição pela esquerda no caso em que haja reservas, comtanto-que estas sejam escriptas por baixo de cada algarismo precedentemente achado, e addicionadas depois com elle:

```
   536
  6927
  7529
 87295
 -----
 80167
  2212
 -----
102287
```

§ 2.°—**Subtracção.**

43.—Subtracção *é a operação que tem por fim, sendo dada a somma de duas parcellas e uma destas, achar a outra.*

Os numeros dados chamam-se, collectivamente, *termos da subtracção*: aquelle termo que se-considera como somma de duas parcellas denomina-se *minuendo*, e a parcella conhecida tem o nome de *subtrahendo*; o numero procurado, isto é, a parcella desconhecida, é o *resto*, *excesso* ou *differença* (o que tudo é o mesmo).

A subtracção póde ser definida por outro modo. Com effeito, o minuendo consta das unidades do subtrahendo e das do resto (n. 38): logo, o resto não é mais do que o numero que se-obtem quando se-tira do minuendo todas as unidades do subtrahendo; assim, pois,

Subtracção *é a operação que tem por fim tirar de um numero todas as unidades de outro.*

44.—O resto de uma subtracção póde ser obtido de dous modos:—1°, addicionando ao subtrahendo as unidades que forem necessarias para se-ter o minuendo (n. 43, 1.ª def.);—2.°, tirando do minuendo cada uma das unidades do subtrahendo (n. 43, 2.ª def.). O primeiro destes dous processos é preferivel quando a differença entre os termos da subtracção não for consideravel, e o segundo quando o subtrahendo contiver poucas unidades; porém, na maioria dos casos, não se-dá nenhuma das precedentes circumstancias, e então o emprego de qualquer dos mencionados processos nos-conduziria a uma operação extremamente longa: é, pois, necessario que procuremos um meio de effectuar, com a maior facilidade possivel, qualquer subtracção.

Conseguiremos o nosso fim mostrando 1.°, como se-effectua uma subtracção no caso em que o *subtrahendo é numero simples, devendo o resto ser tambem numero simples*; 2.°, como se-reduz a esse primeiro caso a subtracção de *numeros compostos*.

45.— 1.° Caso: *subtrahendo simples, devendo o resto ser tambem simples.*—Supponhamos, por exemplo, que se-quer subtrahir 8 de 13: não ha, para effectuar esta subtracção, processo differente dos indicados em o n. 44. Junctando ao subtrahendo 8 as unidades necessarias para se-obter o minuendo 13, diremos: 8 *mais* 1, 9 *mais* 1, 10 *mais* 1, 11 *mais* 1, 12 *mais* 1, 13; e como foi preciso junctar ao subtrahendo 5 unidades, será 5 o resto pedido. Tirando do minuendo 13 cada uma das unidades que constituem o subtrahendo 8, diriamos: 13 *menos* 1, *são* 12; 12 *menos* 1, *são* 11; 11 *menos* 1, *são* 10; 10 *menos* 1, *são* 9; 9 *menos* 1, *são* 8; 8 *menos* 1, *são* 7; 7 *menos* 1, *são* 6; 6 *menos* 1, *são* 5;

ou, mais simplesmente, 13 *menos* 1, 12 *menos* 1, 10 *menos* 1, 9 *menos* 1, 8 *menos* 1, 7 *menos* 1, 6 *menos* 1, 5; o resto procurado é 5, porque são 5 as unidades que ficaram depois de se-tirar do minuendo as unidades do subtrahendo.

Com a repetição de subtracções analogas á que precede adquire-se o habito de as-effectuar facilmente. Costuma-se, na práctica, dizer: 8 *para* 13, 5, ou 13 *menos* 8, 5.

46.—2.º Caso: *minuendo e subtrahendo compostos*—Admittamos que se-pretende subtrahir 5294 de 8376. O resto de uma subtracção, sendo addicionado ao subtrahendo, reproduz o minuendo (n. 43, 1.ª def.); porém, como esta addição se-faz sommando unidades simples com unidades simples, dezenas com dezenas, etc. (n. 41), segue-se que esse resto deve compôr-se das unidades simples, dezenas, etc. que é preciso addicionar ás unidades simples, dezenas, etc. do subtrahendo para obter o minuendo.

O numero que, addicionado a 5 dá 6, é 2: portanto, 2 é o numero exacto das unidades simples do resto pedido.

Não ha numero que, addicionado a 9, dê 7; por onde se-conclue que as dezenas do resto, sommadas com as 9 dezenas do subtrahendo, deram para resultado 7 dezenas *mais* a reserva de 1 centena (*), incluida nas 3 centenas do minuendo. Tomando, pois, 1 centena ao minuendo e sommando-a com 7 dezenas, ter-se-ha 17 dezenas; mas, o numero que, addicionado a 9 dá 17, é 8: é, pois, 8 o numero exacto das dezenas do resto.

As 3 centenas do minuendo ficaram reduzidas a 2

(*) A maior somma de dous numeros simples é 18, a qual produz a reserva de 1 dezena.

centenas; ora, o numero que, addicionado a 2 dá 2, é 0 (zero): não ha, portanto, centenas no resto procurado.

O numero que, addicionado a 5 dá 8, é 3: por conseguinte é 3 o numero exacto dos milhares do resto.

Pelo que precede conclue-se que a differença entre os numeros 8376 e 5294 encerra 2 unidades simples, 8 dezenas, 0 centenas e 3 milhares: o resto procurado é, pois, 3082.

Para commodidade do calculo convem que as unidades simples, as dezenas, etc. dos termos da subtracção correspondam-se em linha vertical, conforme aqui se-vê:

$$\begin{array}{r} 8376 \\ 5294 \\ \hline 3082 \end{array}$$

Regra.—*Escreve-se o subtrahendo por baixo do minuendo de maneira que fiquem unidades simples por baixo de unidades simples, dezenas por baixo de dezenas, etc., e sublinha-se o subtrahendo. Tira-se, começando pela direita, de cada algarismo do minuendo o algarismo que lhe-corresponde no subtrahendo: se um algarismo deste termo exceder o seo correspondente naquelle, juncta-se mentalmente 10 unidades ao menor dos dous algarismos, e considera-se desfalcado de uma unidade o algarismo seguinte do minuendo (á esquerda).*

47.—Observação.—Começa-se pela direita uma subtracção de numeros compostos, por ser, muitas vezes, necessario augmentar um algarismo do minuendo com 10 unidades, as quaes são tomadas ao algarismo que fica á esquerda daquelle: quando, porém, cada algarismo do subtrahendo é inferior ao que lhe-corresponde no minuendo, póde-se começar a subtracção pela direita

ou pela esquerda, indifferentemente. Embora seja mais trabalhoso, podemos, comtudo, principiar qualquer subtracção pela esquerda, comtanto-que a unidade que se-tenha de tomar a um algarismo do minuendo seja escripta por baixo do algarismo correspondente no resto para ser subtrahida depois:

```
27300054
 8143527
--------
29267537
1 111 1
--------
19156527
```

§ 3.º—Multiplicação.

48.—Multiplicação *é a operação que tem por fim, sendo dados dous numeros, repetir um delles tantas vezes quantas forem as unidades do outro* (*).

Os numeros dados chamam-se, collectivamente, *factores*: o factor que deve ser repetido tem o nome de *multiplicando*, e denomina-se *multiplicador* o que indica as vezes que tem de ser o multiplicando repetido; o resultado da multiplicação é chamado *producto*.

49.—O producto de dous factores deve conter o multiplicando repetido tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador (n. 48); por conseguinte, para obter esse producto, basta—addicionar tantas parcellas eguaes ao primeiro daquelles factores quantas forem as unidades do segundo.—Porém, desde-que o multiplicador seja numero composto de muitas unidades, a for-

(*) Esta definição, na qual se-toma a palavra *multiplicar* no sentido de *repetir*, será mais tarde generalizada quando se-tractar da multiplicação de fracções; o mesmo deveremos fazer a respeito da addição, pois-que, definindo esta operação, suppoz-se que as parcellas constavam sómente de unidades.

mação do producto, por meio do processo agora indicado, torna-se uma operação longa e, por isso, enfadonha: tracta-se, pois, de procurar outro processo mais rapido para obter o mencionado producto.

Chegaremos ao nosso fim mostrando 1.º, como se-forma o producto de dous *numeros simples*; 2.º, como se-reduz a depender desse primeiro caso aquelle em que um ou ambos os factores são *numeros compostos*.

50.—1.º Caso: *multiplicação de dous numeros simples*.—Supponhamos que se-quer multiplicar 9 por 4, ou repetir 9 *quatro vezes*: não temos outro meio a empregar senão o exposto em o n. 49. Addicionando 4 parcellas eguaes a 9, diremos: 9 *mais* 9, 18 *mais* 9, 27 *mais* 9, 36. O producto que se-procura é, pois, 36. Proceder-se-ha do mesmo modo em outro qualquer exemplo similhante.

A repetição de multiplicações analogas á que precede nos-dá o habito de as-effectuar promptamente. Na práctica diz-se, por exemplo: 4 *vezes* 9, 36.

51.—2.º Caso: *multiplicação de um numero composto por um numero simples*.—Admitta-se que pretendemos multiplicar 713 por 6. Sendo o producto pedido uma somma de tantas parcellas eguaes ao multiplicando quantas são as unidades do multiplicador (n. 49), addicionemos 6 parcellas eguaes a 713:

```
 713
 713
 713
 713
 713
 713
----
4278
```

Quando se-addicionou as unidades simples das parcellas repetiu-se 6 vezes o algarismo 3 do multiplicando, ou multiplicou-se este algarismo por 6 (n. 48) : o que deu 18 unidades simples ; porém, como esta somma parcial excede a 9, escreveu-se unicamente as 8 unidades simples e reservou-se 1 dezena para addicionál-a á somma das dezenas.

Quando se-addicionou as dezenas das parcellas repetiu-se 6 vezes o algarismo 1 do multiplicando, ou multiplicou-se este algarismo por 6 (n. 48): achou-se 6 dezenas, as quaes, sommadas com 1 dezena de reserva, dão 7 dezenas ; não excedendo a 9 esta somma escreveu-se tal qual.

Quando se-addicionou as centenas das parcellas repetiu-se 6 vezes o algarismo 7 do multiplicando, ou multiplicou-se este algarismo por 6 (n. 48) : o que produziu 42 centenas ; ora, sendo esta somma parcial superior a 9, escreveu-se apenas 2 centenas e reservou-se 4 milhares para escrevêl-os no seo respectivo logar, visto não haver milhares no multiplicando

Na práctica, para maior facilidade, dispõe-se a operação do modo que se-segue :

$$
\begin{array}{r}
713 \\
6 \\
\hline
4278
\end{array}
$$

Regra.—*Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando, e sublinha-se aquelle. Multiplica-se, começando pela direita, cada algarismo do multiplicando pelo multiplicador : se algum producto parcial exceder a 9, escreve-se unicamente as unidades delle e guarda-se mentalmente as suas dezenas para addicionál-as ao producto parcial seguinte.*

52.—A multiplicação de *um numero simples por um numero composto* fica reduzida ao caso precedente se mostrarmos que— *o producto de dous factores não se altera quando tomamos o multiplicando por multiplicador, e vice-versa* (*)—.Supponhamos que se-quer, por exemplo, multiplicar 5 por 4 (5 é o multiplicando e 4 o multiplicador), ou repetir 4 vezes 5 (n. 48) : vai-se mostrar que 4 *vezes* 5 dá o mesmo resultado que 5 *vezes* 4. Repetir 4 vezes 5 unidades é o mesmo que repetir 4 vezes cada uma das unidades que compõem o numero 5 ; ora 1 unidade repetida 4 vezes dá 4 unidades, e como o numero 5 consta de 5 unidades, segue-se que 5 unidades repetidas 4 vezes dão o mesmo resultado que 4 unidades repetidas 5 vezes, ou que o producto 4 vezes 5 equivale ao producto 5 vezes 4.

Esta propriedade não tem logar no caso em que os factores sejam grandezas (n. 5), e não numeros.

53.—Tambem se-reduz ao 2.° caso, ha pouco estudado, ou ao 1.°, a multiplicação de qualquer numero por outro que tenha á sua esquerda um só algarismo significativo, e do qual os demais algarismos sejam zeros. Seja, com effeito, dado o numero 572 para o-multiplicar por 600. Como podemos tomar o multiplicando por multiplicador, e vice-versa (n. 52), se notarmos que o producto pedido não é mais do que a somma de 572 parcellas eguaes a 600 (depois de invertida a ordem dos factores), teremos :

$$
\begin{array}{r}
600 \\
600 \\
\cdots \\
\cdots \\
600 \\
\hline
343200
\end{array}
$$

(*) Veja. n. 81.

A somma parcial das unidades simples, assim como a das dezenas, é *zero*, porque no primitivo multiplicador 600 não ha unidades simples nem dezenas; a somma parcial das centenas consta de 572 parcellas eguaes a 6, e é, portanto, equivalente ao producto de 6 por 572, ou de 572 por 6 (n. 52), o qual se-obtem pela regra do 2.° caso.

O raciocinio que acabamos de fazer conduz-nos á seguinte

Regra.—*Para multiplicar qualquer numero por outro que tenha á sua esquerda um só algarismo significativo, e do qual os demais algarismos sejam zeros, basta multiplicar esse numero pelo dicto algarismo e escrever os zeros á direita do producto.*

Faz-se a operação do modo que segue:

```
   572
   600
343200
```

54.—3.° Caso: *multiplicação de dous numeros compostos.*— Supponha-se que queremos multiplicar 459 por 837. Multiplicar 459 por 837 é repetir o primeiro destes numeros 837 vezes (n. 48); porém, o multiplicador 837 é composto de 7 unidades *mais* 30 unidades *mais* 800 unidades: logo, a nossa operação reduz-se a repetir o multiplicando 7 vezes *mais* 30 vezes *mais* 800 vezes, ou (o que vem a ser a mesma cousa) multiplicar esse multiplicando por 7, por 30 e por 800, e sommar os productos resultantes.

O producto de 459 por 7 é 3213 (n. 51); o producto de 459 por 30 é 13770 (ns 51 e 53); finalmente, o

producto de 459 por 800 é 367200 (ns. 51 e 53): logo, o producto que se-pede é 384183, somma dos productos parciaes 3213, 13770 e 367200.

Na práctica dispõe-se a operação da maneira seguinte:

```
   459
   837
  3213
 1377
3672
384183
```

Não se-escreveu os zeros dos dous ultimos productos parciaes, porém collocou-se os seos algarismos nos logares que estes deveriam occupar se os zeros viessem escriptos.

Regra.—*Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando, e sublinha-se aquelle. Multiplica-se o multiplicando por cada algarismo do multiplicador, e escreve-se os productos parciaes uns por baixo dos outros de modo que o primeiro algarismo á direita de cada um fique na mesma linha vertical em que está o algarismo do multiplicador que serviu para formál-o: somma-se esses productos parciaes e tem-se o producto pedido.*

55.—Observação 1.ª—Na multiplicação de um numero composto por um numero simples começa-se a operação pela direita do multiplicando por causa das reservas que se-vão accumulando nesse mesmo sentido; poder-se-hia, entretanto, como na addição, começar

pela esquerda, embora o calculo se-torne, assim, mais longo :

```
   3947
      8
  -----
  24226
    735
  31576
```

A multiplicação de dous numeros compostos póde ser começada por qualquer dos algarismos do multiplicador : basta que cada producto parcial seja escripto no seo respectivo logar; deve-se, comtudo, principiar sempre pela direita do multiplicando :

```
     5837
      523
  -------
    11674
    17511
   29185
  -------
  3052751
```

OBSERVAÇÃO 2.ª—Quando os dous factores de um producto não tiverem numero egual de algarismos significativos, facilita-se a operação tomando por multiplicador aquelle dos factores que menos algarismos tiver : isso não altera o producto (n. 52).

§ 4º.— Divisão

56.—DIVISÃO *é a operação que tem por fim, sendo dado o producto de dous factores e um destes, achar o outro.*

Os numeros dados chamam-se, collectivamente, *termos da divisão* : o termo que se-considera como

producto de dous factores denomina-se *dividendo*, e o factor conhecido é chamado *divisor* ; o factor que se-procura, isto é, o factor desconhecido, tem o nome de *quociente*.

A divisão, considerada sob o ponto de vista das suas applicações, póde ainda ser definida por dous modos distinctos. Com effeito, o factor conhecido podemos considerál-o, ou como *multiplicando*, ou como *multiplicador* : no primeiro caso pede-se o multiplicador e no segundo o multiplicando ; porém, o multiplicador indica as vezes que o producto contem o multiplicando, e este é uma das partes eguaes que entram na formação do producto (n. 48): logo,

1° DIVISÃO *é a operação que tem por fim determinar quantas vezes um numero contem outro.*

2° DIVISÃO *é a operação que tem por fim repartir um numero em partes eguaes.*

57.—O quociente de uma divisão póde ser achado por tres processos :—1°., multiplicando o divisor por 1, 2, 3, etc., successivamente, até encontrar o dividendo ou dous productos consecutivos entre os quaes este se-ache comprehendido : o numero que, multiplicado pelo divisor, der o dividendo ou o menor dos productos que o-comprehendem, será o quociente ;—2°., subtrahindo o divisor do dividendo, do primeiro resto, do segundo resto, etc., até achar um resto nullo ou menor que o divisor : o numero de subtracções possiveis é o numero de unidades que devem constituir o quociente ;—3°., addicionando o divisor a si-mesmo, á primeira somma, á segunda somma, etc., até obter o dividendo ou a maior somma que nelle se-contiver : o numero das parcellas que se-addicionar é o quociente. Estes tres processos justificam-n'os as tres definições ha pouco apresentadas.

(n. 56). Qualquer que seja, porém, o processo que se-empregue, a operação torna-se nimiamente extensa logo-que o quociente deva constar de muitas unidades: devemos, pois, procurar um meio de achar com rapidez qualquer quociente.

Alcançaremos o nosso fim mostrando 1.°, como se-effectua uma divisão no caso em que *o divisor é numero simples, devendo tambem o quociente ser numero simples*; 2.°, como se-reduz a esse primeiro todos os outros casos.

58.—Observação—.Deu-se aos termos da divisão os nomes de *dividendo* e *divisor* considerando esta operação como tendo por objecto repartir um numero em partes eguaes (n. 56, 2.°); ao resultado attribuiu-se a denominação de *quociente* admittindo que a divisão tem por fim determinar quantas vezes um numero contem outro (n. 56, 1.°).

59.—1.° Caso : *divisor simples, devendo o quociente ser tambem simples*—. Supponha-se que queremos dividir 36 por 9 : os unicos processos que podemos empregar aqui são os expostos em o n. 57. Multiplicando 9 por 1, 2, 3, etc., vê-se que 4 vezes 9 reproduz 36 : portanto, o quociente pedido é 4 ; por meio de subtracções ou de addições successivas obteriamos o mesmo resultado :

36	
9	1.ª subtr.
27	
9	2.ª subtr.
18	
9	3.ª subtr.
9	
9	4.ª subtr.
0	

9	1.ª parc.
9	2.ª parc.
18	
9	3.ª parc.
27	
9	4.ª parc.
36	

Admitta-se agora que se-pretende dividir 17 por 5. Por meio de multiplicações acharemos que 17 está comprehendido entre 3 vezes 5 e 4 vezes 5; por onde se-conclue que o quociente da divisão de 17 por 5 é *maior que* 3 e *menor que* 4: é 3 o *quociente approximado por defeito* ou a *parte inteira* do quociente que se-pede, e 4 o *quociente approximado por excesso* ou o *quociente forçado*. Por meio de subtracções ou addições successivas obter-se-hia o mesmo resultado: o resto da ultima subtracção ou o excesso do dividendo sobre a maior somma de parcellas eguaes ao divisor contida no mesmo dividendo, tem o nome de *resto da divisão*, o qual no exemplo proposto é 2.

A repetição de divisões como as dos exemplos que precedem permitte-nos adquirir o habito de as-effectuar promptamente. Na práctica é costume dizer-se, por exemplo, *em* 36 *quantas vezes ha* 9? 4; *em* 17 *quantas vezes ha* 5 ? 3.

60.—Observação.— Uma divisão póde ser *exacta* ou *inexacta*: é *exacta* quando se-faz sem resto; é *inexacta* no caso contrario. Quando uma divisão é inexacta o dividendo compõe-se de duas partes: 1.ª, o producto do divisor pela parte inteira do quociente, e 2.ª, o resto da divisão; o que se-costuma reduzir ao seguinte principio:

Numa divisão inexacta o dividendo é egual ao producto do divisor pela parte inteira do quociente, mais o resto.

Tendo-se a parte inteira de um quociente, póde-se querer o valor exacto deste mesmo quociente; para isso juncta-se á parte inteira uma parte complementar (que mostraremos depois como se-acha), e a expressão resultante denomina-se *quociente completo*, por opposição á parte inteira, que é um *quociente incompleto*.

61.—2.º Caso : *divisor composto, devendo o quociente ser simples.*— Seja dado o numero 4109 para dividil-o por 492. Deve o quociente pedido ser numero simples, porque, multiplicando o divisor por 10, tem-se 4920 (n. 53), e o nosso dividendo é menor do que este numero.

O quociente de qualquer divisão, sendo multiplicado pelo divisor, ha de produzir o dividendo ou um numero que deste diffira em menos de uma vez o divisor (n. 59); ora, se tomarmos o divisor como multiplicador (o que, entre numeros, é permittido), formar-se-ha o producto multiplicando o quociente pelas unidades simples, pelas dezenas, etc., do divisor e sommando os resultados (n. 54) : logo, o dividendo (producto) é a somma dos productos parciaes do quociente pelas unidades simples, pelas dezenas, etc., do divisor, mais o resto da divisão se esta for inexacta.

Se conhecessemos algum dos productos parciaes de que consta o dividendo 4109, com facilidade achariamos o quociente pedido (n. 59) ; mas, esses productos não os-conhecemos, porque elles, no dividendo, acham-se confundidos, em consequencia das reservas que um fornece ao de ordem immediatamente superior. Podemos, entretanto, descobrir em que parte do dividendo se-acha contido o producto do quociente pelas *mais altas unidades* do divisor, porque as reservas (se as-houver) deste producto não se-vão accumular a outro

O producto do quociente pelas 4 centenas do divisor é, evidentemente, um numero exacto de centenas, o qual não póde estar contido senão nas 41 centenas do dividendo. Estas 41 centenas pódem conter, além do mencionado producto, centenas provenientes do producto pelas dezenas (centenas que constituem as reservas) e do resto da divisão ; porém, as reservas do producto pelas dezenas pódem exceder as 4 centenas do divisor, porque, se este producto for 9 vezes 9 dezenas ou 81 dezenas, dará 8 centenas de reserva : por consequencia, dividindo 41 centenas por 4 centenas ou (o que é o mesmo) 41 por 4, obter-se-ha o quociente procurado ou um numero maior do que elle.

O numero que, multiplicado por 4 dá o maior producto contido em 41, é 10, com o resto 1 ; notando, porém, que o quociente procurado não póde exceder a 9, somos levados a verificar este algarismo. Se 9 for o quociente pedido, multiplicando-o por todo o divisor teremos um numero egual ou inferior ao dividendo ; mas, o producto de 492 por 9 é 4428, numero maior que o dividendo : logo 9 é maior que o quociente procurado. Verifiquemos o algarismo 8. O producto de 492 por 8 é 3936, numero inferior ao dividendo : portanto, 8 é o quociente pedido, approximado por defeito. Para obter o resto da divisão basta subtrahir do dividendo o producto do divisor por 8 (n. 59).

Na práctica dispõe-se do modo seguinte a operação :

```
4109 |492
3936  ---
----   8
 173
```

Regra.—*Escreve-se o dividendo e em seguida o divisor, separados por um traço vertical ; e sublinha-se o divisor para separál-o do quociente. Divide-se pelo primeiro algarismo á esquerda do divisor o numero total das unidades da mesma ordem existentes no dividendo : obter-se-ha assim o quociente pedido ou um numero maior que elle. Multiplica-se todo o divisor pelo algaris-*

mo achado: se o producto não exceder o dividendo, será esse algarismo o quociente pedido; no caso contrario experimenta-se do mesmo modo o algarismo immediatamente inferior.

62.—Observação —Na práctica a simples inspecção dos numeros dados nos-permitte quasi sempre achar, neste 2.° caso de divisão, o algarismo do quociente. Entretanto, vamos apresentar um meio de, com menor trabalho, acertar com esse algarismo.

Consideremos, por exemplo, a divisão de 2785 por 356. O divisor proposto acha-se comprehendido entre 300 e 400: logo, o quociente pedido estará entre 9, quociente de 2785 por 300, e 6, quociente de 2785 por 400. Os numeros 9 e 6 são os *limites* do quociente pedido; e por ahi se-conclue que é necessario experimentar os algarismos 9, 8, 7, e 6, para achar entre elles aquelle quociente. Evita-se, porém, a incerteza que resulta de não se-saber por qual dos algarismos se-deve principiar, attendendo á seguinte observação: —*Quando o segundo algarismo do divisor, a contar da esquerda, for egual ou superior a 5, o quociente acha-se mais proximo do limite inferior ou é egual a elle; quando, ao contrario, o dicto algarismo for menor do que 5, o quociente estará mais proximo do limite superior ou será egual a elle.*—Assim é que, no exemplo adduzido, por ser egual a 5 o segundo algarismo do divisor, o quociente procurado, que é 7, acha-se mais proximo do limite inferior 6.

63.—3.° Caso: *divisor simples ou composto, devendo o quociente ser composto.*—Supponhamos que é dado o numero 231064 para o-dividir por 527. Deverá o quociente procurado ser numero composto, porque,

multiplicando o divisor por 10, acha-se 5270 (n.°53), e o dividendo é maior do que este numero. Demais, o dicto quociente encerra *tres algarismos*; pois-que, estando o nosso dividendo comprehendido entre os productos do divisor por 100 e por 1000 (n. 53), achar-se-ha o quociente comprehendido entre 100 e 1000, e, portanto, não poderá ser menor que 100 nem maior que 999: ora, estes dous numeros têm, cada um, tres algarismos.

Em qualquer divisão o quociente, sendo multiplicado pelo divisor, reproduz o dividendo ou um numero que delle diffira em menos que uma vez o divisor (n. 59); porém, logo-que o quociente é numero composto, se o-tomarmos como multiplicador (o que é licito, tractando-se de numeros), formar-se-ha o producto multiplicando o divisor pelas unidades simples, pelas dezenas, etc., do quociente (n. 54): portanto, o dividendo é a somma dos productos parciaes do divisor pelas unidades simples, pelas dezenas, etc., do quociente, mais o resto da divisão.

Se conhecessemos cada um dos productos parciaes que entram na formação do dividendo 231064, não haveria difficuldade em determinar cada um dos tres algarismos do quociente pedido (n. 61): porém, esses productos não os-conhecemos, porque, quando se-formou o dividendo, o producto do divisor pelo algarismo que, no quociente, exprime uma certa ordem de unidades dá, não sómente unidades dessa ordem, mas tambem unidades de ordem superior que se-vão junctar aos productos seguintes. Podemos, comtudo, descobrir em que parte do dividendo está contido o producto do divisor pelo algarismo das *mais altas unidades* do quociente, por isso que é esse o unico producto que não fica desfalcado.

O producto do divisor 527 pelas centenas do quoci-

ente é, por certo, um numero exacto de centenas, o qual sómente póde achar-se nas 2310 centenas do dividendo. Estas 2310 centenas pódem conter, além do referido producto, reservas de centenas provenientes dos productos anteriores; porém, estas reservas não exercem nenhuma influencia sobre a determinação do algarismo que queremos achar para o quociente. Com effeito, para que o algarismo das centenas ficasse augmentado de uma unidade, seria necessario que o producto do divisor 527 por esse algarismo ficasse augmentado de 527 centenas, pelo menos; ora, suppondo (caso mais desfavoravel) que o numero formado pelos outros dous algarismos do quociente é 99, o producto do divisor por este numero é, evidentemente, menor do que o producto do mesmo divisor por 100, ou menor do que 527 centenas: portanto, quando dividirmos 2310 por 527, obteremos o algarismo exacto das centenas do quociente.

O numero que, multiplicado por 527 dá o maior producto contido em 2310, é 4, havendo de resto 202: é, pois, 4 o numero exacto das centenas do quociente. Multiplicando o divisor por estas 4 centenas e subtrahindo o producto que se-achar do dividendo, virá para resto total 20264: este resto contem os productos do divisor pelas dezenas e pelas unidades simples do quociente, e o resto final (se o-houver).

O producto do divisor 527 pelas dezenas do quociente é um numero exacto de dezenas, o qual não póde estar contido senão nas 2026 dezenas do resto total. Estas 2026 dezenas pódem conter, além do mencionado producto, reservas de dezenas provenientes do producto precedente; porém, estas reservas nenhuma influencia exercem sobre a determinação do algarismo das dezenas do quociente. Com effeito, para que este algarismo ficasse

accrescido de uma unidade, seria preciso que o producto do divisor por elle ficasse accrescido de 527 dezenas, pelo menos; mas, admittindo que o algarismo das unidades do quociente é 9 (caso mais desfavoravel), o producto do divisor por este algarismo é, evidentemente, menor do que o producto do mesmo divisor por 10, ou menor do que 527 dezenas: por conseguinte, se dividirmos 2026 por 527, acharemos o algarismo exacto das dezenas do quociente.

O numero que, multiplicado por 527 dá o maior producto contido em 2026, é 3, com o resto 445: portanto, 3 é o numero exacto das dezenas do quociente. Se multiplicarmos o divisor por estas 3 dezenas, e subtrahirmos do numero 20264 o producto obtido, teremos para segundo resto total 4454: este resto contem ainda o producto do divisor pelas unidades do quociente e o resto final (havendo-o).

O resto final de uma divisão é sempre menor do que o divisor; portanto, dividindo o numero 4454 por 527, achar-se-ha o numero exacto das unidades do quociente.

O numero que, multiplicado por 527 dá o maior producto contido em 4454, é 8, com o resto 238: logo, 8 é o numero exacto das unidades do quociente; e 238 é o resto final da divisão proposta.

A disposição do calculo é a seguinte:

```
231064 |527
       |----
2108    438
----
 2026
 1581
 ----
  4454
  4216
  ----
   238
```

Regra.—*Escreve-se o dividendo e depois delle o divisor, separados por um traço vertical; sublinha-se o divisor para separál-o do quociente. Toma-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos sejam precisos para que o numero por elles formado contenha o divisor ao menos uma vez e menos de dez vezes: dividindo esse numero pelo divisor, ter-se-ha o algarismo das mais altas unidades do quociente. Do primeiro dividendo parcial subtrahe-se o producto do divisor pelo algarismo achado, e á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo total: o numero assim formado constitue o segundo dividendo parcial, com o qual se-procede da mesma fórma que com o primeiro. Continua-se a operação até se-haver considerado todos os algarismos do dividendo total.*

64.—Observação 1ª.—Podemos simplificar o calculo, neste 3º caso de divisão, *se* (em logar de escrevermos por baixo de cada dividendo parcial o producto do divisor pelo algarismo que esse dividendo forneceu, para depois ser subtrahido deste o dicto producto) *effectuarmos mentalmente a multiplicação e a subtracção* e escrevermos por baixo de cada um dividendo sómente o resto:

```
231064 | 527
 2026  |-----
  4454 | 438
   238
```

Considerando o primeiro dividendo parcial, diremos: 4 *vezes* 7, 28 *para* 30, 2; 4 *vezes* 2, 8 *mais* 3 de reserva, 11 *para* 11, zero; 4 *vezes* 5, 20 *mais* 1 de reserva, 21 *para* 23, 2. Tem-se assim o resto 202: escrevendo 6 á direita deste resto, acha-se o segundo dividendo parcial 2026.

Observação 2ª.—Ainda se-póde tornar mais simples, neste 3º caso, a divisão, logo-que o divisor seja numero simples. Dispõe-se os numeros dados conforme a regra manda, mas o quociente escreve-se por baixo do dividendo, como se-segue:

```
27934287 | 8
         |-----
 3491785
       7
```

Dir-se-ha: *a* 8ª *parte de* 27 *é* 3, e fica para resto 3, o qual, com o 9 á direita, faz 39; *a* 8ª *parte de* 39 *é* 4, ficando como resto 6, o qual, com o 3 á direita, faz 63; e assim por deante, até chegar ao ultimo algarismo da direita, por baixo do qual se-escreve o resto da operação.

Observação 3ª.—A divisão é indispensavel começál-a pela esquerda do dividendo, vista a impossibilidade em que estamos de reconhecer as reservas que, de um producto, vão accumular-se ao de ordem immediatamente superior.

§ 5.º—Provas

65.—Prova *de uma operação arithmetica é outra operação que se-faz para verificar o resultado da primeira.*

A prova não nos-dá certeza absoluta de que a primeira operação se-fez sem erro, porque pódem reproduzir-se, em sentido inverso, naquella operação os erros que nesta se-tiver commettido; entretanto, sendo raro

dar-se este facto, temos na prova um meio de verificar, com grande probabilidade, a exactidão do calculo.

66.—Prova da addição.—*Somma-se de novo, mas em sentido inverso: se o ultimo resultado for egual ao que se-obteve pela primeira addição, é provavel que esta esteja certa.*

Esta prova basêa-se em que, sommando num certo sentido (de cima para baixo, por exemplo), póde succeder que se-erre para mais ou para menos na addição de alguns algarismos; porém, sommando em sentido inverso do primeiro, é provavel que se não commetta o mesmo erro.

67.—Prova da subtracção.—*Somma-se o resto com o subtrahendo: se a somma for egual ao minuendo, é provavel que esteja exacta a operação* (n. 43.)

68.—Prova da multiplicação.—*Multiplica-se de novo, depois de invertida a ordem dos factores: se o ultimo resultado for egual ao primeiro, é provavel que se não tenha errado.*

Esta prova basêa-se em que não se-altera o producto de dous factores quando se-inverte a ordem destes (n. 52), e depois da inversão não é provavel que se-commetta os mesmos erros que a principio.

69.—Prova da divisão.—*Multiplica-se o divisor pelo quociente e ao producto obtido juncta-se o resto da divisão: se acharmos um numero egual ao dividendo, é provavel que não tenha havido erro* (n. 60.)

70.—Observação.—As provas que precedem são denominadas *provas reaes*, porque, *se estiverem certas* manifestam *todos* os erros que se-houver commettido na operação. Não nos-alongamos na exposição de outras

provas, pois entendemos que a mais efficaz de todas consiste em—fazer de novo a operação com o maior cuidado que for possivel—.

Além das provas reaes ha tambem outras em que se-emprega os *caracteres de divisibilidade*; destas nos-occuparemos em logar competente (n. 116).

CAPITULO II

PROPRIEDADES

Da multiplicação e da divisão

71.—O conhecimento que se-tem das cousas póde ser de duas especies: *vulgar* ou *scientifico*. Possuirá conhecimento apenas vulgar de uma operação arithmetica aquelle que souber tão sómente *como se-effectua* essa operação; e terá conhecimento scientifico aquelle que souber dar as razões *porque se-effectua* a operação deste ou daquelle modo.

Sciencia *é o conhecimento certo e evidente das cousas por meio das suas causas ou razões.* (*)

72.—As verdades que constituem uma sciencia vem formuladas em proposições: uma proposição certa torna-se, para nós, evidente depois que a-tivermos demonstrado.

Demonstração *é o raciocinio por meio do qual se-torna evidente uma proposição certa, conhecendo outras proposições evidentes de que ella dependa e as relações que a-ligam com estas ultimas.*

(*) O conhecimento *provavel* ou *obscuro* não constitue, propriamente, sciencia.

As proposições evidentes em que está baseada uma demonstração, chamam-se *principios*.

73.—As proposições que se-considera na Arithmetica pódem reduzir-se ás seguintes:

DEFINIÇÃO *é a proposição evidente que explica uma cousa, quer pelo seo nome, quer pela sua natureza.*
Temos visto já exemplos de definições.

AXIOMA *é a proposição evidente por si-mesma.*
Os axiomas de que faremos uso são:

1.°—*Duas quantidades eguaes a uma terceira são eguaes entre si.*

2.°—*Se duas quantidades são eguaes e se effectuarmos sobre ambas a mesma operação, os resultados que obtivermos são eguaes.*

THEOREMA *é a proposição que se-torna evidente por meio de uma demonstração.*
Distingue-se num theorema duas partes: *these* e *hypothese*. THESE é a proposição que se-quer demonstrar; HYPOTHESE é uma ou mais proposições evidentes de que depende a these.

COROLLARIO *é a proposição cuja verdade está contida na do theorema anterior.*

PROBLEMA *é a proposição na qual se-pede uma ou mais quantidades, logo-que sejam dadas outras que se-achem ligadas com as primeiras por meio de relações conhecidas.*
Num problema distingue-se duas especies de quantidades: *incognitas* e *dados*. INCOGNITAS são as quantidades que se-pede; DADOS são as quantidades conhecidas de que dependem as incognitas. Uma incognita

recebe, depois de achado o seo valor, o nome de *solução*; e a serie de raciocinios e operações com que se-determina as incognitas, denomina-se *resolução*.

REGRA *é o processo que se-deve empregar para fazer uma cousa.*

74.—E' muitas vezes vantajoso que os nossos raciocinios, demonstrando uma proposição, sejam independentes dos valores que têm os numeros que se-considera e das regras que se-deve seguir para combinál-os: attinge-se este resultado representando os numeros por *lettras*, em vez de algarismos, e indicando as operações, em logar de effectuál-as, por meio de *signaes*.

1.°—As primeiras lettras do alphabeto representam os numeros que, numa questão, se-suppõe dados, e as ultimas os que são desconhecidos. (*)

2.°—Os signaes indicativos das operações fundamentaes, são:

Signal de addição (+), que se-lê *mais*.

Signal de subtracção (—), que se-lê *menos*.

Signal de multiplicação (.), que se-lê *multiplicado por*.

A multiplicação tambem póde ser indicada pelo signal (×), que se-lê do mesmo modo que o precedente. Dispensa-se o emprego de signal quando os factores são litteraes.

Signal de divisão (:), que se-lê *dividido por*.

Tambem se-indica a divisão por meio de um traço

(*) Representaremos os numeros por lettras, em duas circumstancias: 1.°, quando esses numeros são incognitos; 2.°, quando, suppondo-os dados, a escolha delles não se-possa fazer á simples vista.

horizontal (—), escrevendo-se então o dividendo por cima do traço e o divisor por baixo.

Emprega-se ainda o parenthese ( ) para indicar que a expressão envolvida por elle representa um numero unico.

Exemplifiquemos. Sendo a e b dous numeros quaesquer, a sua somma é $a+b$; sua differança, $a—b$; o producto delles, $a.\ b$, $a \times b$ ou, simplesmente, $a\ b$: o quociente da divisão de a por b é $a : b$ ou $\frac{a}{b}$. Se tivessemos de multiplicar $a+b$ por $c—d$, escreveriamos (empregando o parenthese) $(a+b)\ (c—d)$.

75.—Quando comparamos dous numeros acontece que elles, ou são eguaes, ou deseguaes. A egualdade indica-se pelo signal (=), que se-lê *egual a*; a desegualdade, pelos signaes (>) e (<), que se-lêm *maior que* e *menor que*, escrevendo sempre o numero maior na abertura do signal. O signal de egualdade e os de desegualdade chamam-se *signaes de comparação*.

Os numeros separados por qualquer dos signaes de comparação denominam-se *membros* : *primeiro membro* o que vem antes do signal e *segundo membro* o que está depois. A expressão resultante chama-se *egualdade* ou *desegualdade*, conforme são eguaes ou deseguaes os seos dous membros.

76.—Os signaes que acabamos de enumerar são os de maior uso na Arithmetica: além destes ha outros que adeante faremos conhecer. Resumindo o exposto em os ns. 74 e 75, diremos que ha tres principaes classes de signaes: *signaes de valores*, que são as lettras; *signaes de operações*, que são (+), (—), (.), (:); *signaes de comparação*, que vem a ser (=), (>) e (<).

§ 1º.—**Propriedades da multiplicação**

77.—Quando tractámos da multiplicação considerámos apenas o caso de serem dados dous factores; sendo, porém, dados tres ou mais factores, o seo producto obtem-se—multiplicando entre si os dous primeiros factores; multiplicando este primeiro producto pelo terceiro factor; etc.—.

78.—O producto de dous ou mais factores toma uma denominação especial quando esses factores são eguaes.

POTENCIA *é um producto de factores eguaes*. Assim, 6. 6. 6 e $a\ a\ a\ a\ a$ são potencias, a primeira de 6 e a segunda de a.

Para simplificar a expressão de uma potencia costuma-se escrever só um dos seos factores, tendo este á sua direita e um tanto acima um numero que indique quantos são esses factores; este numero chama-se EXPOENTE (*) As potencias 6. 6. 6 e $a\ a\ a\ a\ a$ escrevem-se, pois, 6^3 e a^5.

Classifica-se as potencias conforme os expoentes: a segunda potencia chama-se *quadrado*, e a terceira, *cubo*; as outras não têm nomes particulares.

79.—THEOREMA I. *O producto de uma somma por qualquer numero é egual á somma dos productos de cada parcella por esse numero.*

Demonstração.—Seja $5+8$ uma somma que se deve multiplicar por um numero, v. g. 4 : vamos mostrar que

$$(5+8).4=5.4+8.4$$

(*) O expoente é *signal de simplificação*, e constitue a quarta classe de signaes empregados na Arithmetica.

Multiplicar $5+8$ por 4 é repetir 4 vezes o multiplicando $5+8$ (n. 48); porém, é evidente que repetir uma somma equivale a repetir cada uma das suas parcellas e addicionar os resultados: logo, o producto de $5+8$ por 4 é egual a 4 vezes 5 *mais* 4 vezes 8, isto é:

$$(5+8).\ 4=5.4+8.4 \qquad C.\ q.\ d.\ (*)$$

80.—Theorema II. *O producto de uma somma por outra é egual á somma dos productos de cada parcella da primeira somma por cada parcella da segunda.*

Demonstração.— Sejam $5+7$ e $3+8$ duas sommas que queremos multiplicar uma pela outra: vai-se provar que

$$(5+7).\ (3+8)=5.\ 3+.7.3+5.\ 8+7.8$$

Multiplicar $5+7$ por $3+8$ reduz-se a repetir 3 vezes mais 8 vezes o multiplicando $5+7$; porém, o multiplicando $5+7$, sendo repetido 3 vezes ou multiplicado por 3, nos-dá $5.\ 3+7.3$ (n. 79), e sendo repetido 8 vezes ou multiplicado por 8, nos-conduz a $5.\ 8+7.\ 8$ (n. 79): portanto, o producto de $5+7$ por $3+8$ é equivalente a $5.3+7.\ 3+5.\ 8+7.8$; e assim temos

$$(5+7).\ (3+8)=5.\ 3+7.\ 3+5.\ 8+7.8 \qquad C.\ q.\ d.$$

Por meio de raciocinio analogo a este, achariamos que

$$4.\ (5+8)=4.\ 5+4.8$$

isto é, que—*O producto de qualquer numero por uma somma é egual á somma dos productos do numero por cada parcella da somma*—.

(*) As tres lettras *C. q. d.* querem dizer *como queriamos demonstrar.*

81.—Theorema III. *Um producto é independente da ordem em que se-multiplica os seos factores.*

Demonstração.—A demonstração completa do nosso actual theorema encerra quatro partes, que vamos demonstrar successivamente.

1°. *Num producto de dous factores póde-se tomar o multiplicando por multiplicador, e vice-versa* (*)—. Seja 5.4 um producto de dous factores, no qual 5 é o multiplicando e 4 o multiplicador: devemos provar que

$$5.4=4.5$$

Multiplicar 5 por 4, ou repetir 4 vezes o multiplicando 5, é o mesmo que repetir 4 vezes cada uma das unidades que compõem o numero 5 e sommar os resultados (n. 79); ora, *uma unidade* repetida 4 vezes dá 4 *unidades*: logo, 5 unidades repetidas 4 vezes produzem o mesmo resultado que 4 unidades repetidas 5 vezes, isto é, o producto de 5 por 4 é o mesmo que o de 4 por 5.

2°. *Num producto de tres factores póde-se inverter a ordem dos dous ultimos.*—Seja 7..4. 3 um producto de tres factores: vamos demonstrar que

$$7.\ 4.\ 3=7.\ 3.\ 4.$$

O producto 7. 4 dos dous primeiros factores é a somma de 4 parcellas eguaes a 7 (n. 49); porém, mul-

(*) Esta 1ª parte do theorema, embora tenha sido provada já (n. 52), convem, todavia, reproduzir aqui a sua demonstração, afim de não alterar a connexão das idéas.

tiplicar a somma 7. 4 por 3 reduz-se a multiplicar por este numero cada uma das 4 parcellas e addicionar os resultados (n. 79): por conseguinte, o producto 7. 4. 3 compõe-se da somma de 4 parcellas eguaes a 7. 3, e é, pois, egual a 7. 3. 4.

3°. *Num producto de tres ou mais factores póde-se inverter a ordem de dous factores consecutivos quaesquer.*—Seja dado um producto de cinco factores, 7. 4. 3. 8. 6: vai-se demonstrar que, invertendo, por exemplo, a ordem dos dous factores 3 e 8, tem-se

$$7.\ 4.\ 3.\ 8.\ 6 = 7.\ 4.\ 8.\ 3.\ 6.$$

Para se-formar o producto 7. 4. 3. 8. 6 torna-se necessario multiplicar 1°, 7 por 4; 2°, o primeiro producto obtido por 3; 3°, o segundo producto por 8; 4°, o terceiro producto por 6 (n.77); ora, em vez de multiplicarmos o primeiro producto 7. 4 por 3 e, depois, o resultado por 8, póde-se, conforme a 2ª parte, multiplicar esse producto por 8 e o resultado por 3: por onde se-conclue que

$$7.\ 4.\ 3.\ 8 = 7.\ 4.\ 8.\ 3;$$

multiplicando por 6 ambos os membros desta egualdade, vem, finalmente,

$$7.\ 4.\ 3.\ 8.\ 6 = 7.\ 4.\ 8.\ 3.\ 6.$$

4°. *Num producto de tres ou mais factores póde-se inverter de qualquer modo a ordem destes, sem que o producto se-altere.*—Considere-se o producto 7. 4. 3. 8. 6: vamos mostrar que um qualquer dos factores póde occupar cada um dos cinco logares do producto.

O factor 7 occupa o primeiro logar; mas, podemos trocar a posição deste factor com a do factor que o-segue immediatamente (3°): portanto.

$$\begin{aligned} 7.\ 4.\ 3.\ 8.\ 6 &= 4.\ 7.\ 3.\ 8.\ 6 \\ &= 4.\ 3.\ 7.\ 8.\ 6 \\ &= 4.\ 3.\ 8.\ 7.\ 6 \\ &= 4.\ 3.\ 8.\ 6.\ 7 \end{aligned}$$

Simelhantemente, quando trocarmos a posição do factor 4 com a do que o-precede e a do que o-segue immediatamente, teremos

$$\begin{aligned} 7.\ 4.\ 3.\ 8.\ 6 &= 4.\ 7.\ 3.\ 8.\ 6 \\ &= 7.\ 3.\ 4.\ 8.\ 6 \\ &= 7.\ 3.\ 8.\ 4.\ 6 \\ &= 7.\ 3.\ 8.\ 6.\ 4 \end{aligned}$$

Temos demonstrado 1°, que *num producto de dous factores póde-se trocar os logares destes* (1.°), 2° que *num producto de tres ou mais factores póde-se tomar estes na ordem em que se-quizer* (4°): logo, um producto qualquer é independente da ordem em que se-multiplica os seos factores. *C. q. d.*

82.—Corollario. *Um producto de tres ou mais factores não se-altera quando substituimos alguns delles pelo seo producto effectuado.*

Demonstração.—Seja 7. 4. 3. 8. 6 o producto que se-considera: queremos fazer ver que, sem alterar o valor do producto, podemos substituir alguns dos factores pelo seo producto effectuado.

Admitta-se que são 7 e 8 os factores de que se-tracta. Se ambos os factores 7 e 8 fossem os primeiros do producto dado, a nossa proposição seria evidente, pois-que, para formar este producto, teriamos de mul-

tiplicar primeiramente 7 por 8, o que dava (7.8) (*), e, se parassemos nesta primeira multiplicação, tinhamos de indicar o producto de (7. 8) pelos factores restantes á direita (n. 77); ora, é sempre possivel fazer com que os factores 7 e 8 occupem os dous primeiros logares do producto (n. 81): logo, podemos substituir7 e 8 por (7. 8).

C. q. d.

Applicação.—Se tivessemos de formar o producto

$$4.\ 9.\ 20.\ 25.\ 125.\ 5.\ 8,$$

seria mais vantajoso agrupar os factores na ordem seguinte:

$$(4.\ 25).\ (5.\ 20).\ (8.\ 125).9=100.100.1000.9$$
$$=90000000.$$

83.—THEOREMA IV. *Multiplicar um producto por qualquer numero é o mesmo que multiplicar por este numero um dos factores desse producto, e depois multiplicar pelos outros o resultado.*

Demonstração.—Seja (3. 5. 8) um producto, e 7 qualquer numero, pelo qual queremos multiplicar aquelle producto: vamos provar que basta, para este fim, multiplicar por 7 um dos factores.

Multiplicar o producto (3. 5. 8) por 7 reduz-se a multiplicar 3 por 5, o primeiro resultado (3. 5) por 8, e o segundo resultado (3. 5. 8) por 7 o que dá (3. 5. 8. 7) (n. 77); mas, antes de effectuar as multiplicações, podemos sempre 1°, alterar á vontade a ordem dos factores, (n. 81); 2°, substituir dous factores pelo seo producto effectuado (n. 82): conseguintemente, se no producto

(*) O parenthese mostra que o producto 7. 8 suppõe-se effectuado.

indicado 3. 5. 8 7 transportarmos os factores 5 (por exemplo) e 7 para os dous primeiros logares e substituirmos esses factores pelo seo producto (5.7), teremos

$$(3.\ 5.\ 8).\ 7=3.\ 5.\ 8.\ 7$$
$$=5.\ 7.\ 3.\ 8$$
$$=(5.\ 7)\ 3.\ 8$$

C. q. d.

84.—THEOREMA V. *Multiplicar qualquer numero por um producto é o mesmo que multiplicál-o successivamente por cada um dos factores desse producto.*

Demonstração.—Seja 7 um numero qualquer e (3. 5. 8) o producto de tres factores, 3, 5 e 8, effetuado: queremos provar que se-obtem o mesmo resultado multiplicando 7 por (3. 5. 8) ou multiplicando esse numero por 3, por 5 e por 8, successivamente.

Temos (n. 81, 1°)

$$7.\ (3.\ 5.\ 8)=(3.\ 5.\ 8).\ 7\ ;$$

mas, no segundo membro, podemos substituir o producto indicado 3. 5. 8 em logar do producto effectuado (3. 5. 8), os quaes são, evidentemente, eguaes: portanto,

$$7.\ (3.\ 5.\ 8)=3.\ 5.\ 8.\ 7.$$

donde se-deduz, invertendo os factores do segundo membro (n. 81, 4°),

$$7.\ (3.\ 5.\ 8)=7.\ 3.\ 5.\ 8.$$

C. d. q.

85.—OBSERVAÇÃO.—Por meio dos dous theoremas anteriores póde-se demonstrar, muito simplesmente, que—*na multiplicação de dous factores terminados por zeros podemos abstrahir destes, comtanto-que os escre-*

vamos á direita do producto dos numeros formados pelos algarismos da esquerda. Assim,

$$795000.3600=(795.\ 1000).\ (36.100)$$
$$=795.1000.36.100$$
$$=(795.36).\ (1000.\ 100)$$
$$=28620.\ 100000$$
$$=2862000000$$

86.—THEOREMA VI. *O producto de duas ou mais potencias de um numero é uma potencia do mesmo numero, e o expoente dessa potencia é a somma dos expoentes dos factores.*

Demonstração.—Seja 7 qualquer numero e sejam 7^3 e 7^5 duas potencias de 7; vamos provar que

$$7^3.\ 7^5=7^{3+5}$$

A potencia 7^3 contem 3 factores eguaes a 7, e a potencia 7^5 contem 5 (n. 78); ora, para multiplicar 7^3 por 7^5, basta multiplicar o primeiro destes numeros par cada um dos factores do segundo (n. 84): logo, o producto $7^3.\ 7^5$ deve encerrar 3+5 factores eguaes a 7, e, portanto, este producto equivale a 7^{3+5} (n. 78). *C. q. d.*

Este raciocinio póde estender-se a qualquer numero de potencias.

87.—COROLLARIO. *Para elevar uma potencia de qualquer numero a uma outra potencia, basta dar a esse numero por expoente o producto dos expoentes das duas potencias.*

Demonstração.—Seja 4^3 qualquer potencia de 4, a qual queremos elevar á potencia do grao 8: deve-se ter

$$(4^3)^8=4^{3.8}$$

A potencia $(4^3)^8$ é o producto de 8 factores eguaes a 4^3 (n. 78); mas, para formar esse producto, é necessario dar ao numero 4 por expoente a somma dos expoentes dos factores (n. 86), e sendo estes 8 expoentes eguaes a 3, sua somma á 3. 8 (n. 49): portanto a mencionada potencia é equivalente a $4^{3.8}$. *C. q. d.*

88.—THEOREMA VII. *Elevar um producto a qualquer potencia é o mesmo que elevar a esta mesma potencia cada factor do producto e multiplicar os resultados.*

Demonstração.—Seja $3^2.\ 4.\ 7$ um producto que queremos elevar á potencia do grao 6: vamos mostrar que

$$(3^2.\ 5.\ 7)^6=(3^2)^6.\ 5^6.\ 7^6.$$

Para elevar á potencia do grao 6 o producto $3^2.5.7$, devemos multiplicar entre si 6 factores eguaes a $3^2.5.\ 7$ (n. 78); porém, visto-que o producto $3^2.5.7$ encerra tres factores, 3^2, 5 e 7, e podendo-se multiplicar estes factores na ordem em que se-quizer (n. 81), segue-se que a potencia procurada conterá 6 factores eguaes a 3^2, 6 factores eguaes a 5 e 6 factores eguaes a 7: logo, essa potencia é equivalente a $(3^2)^6.\ 5^6.7^6$. *C. q. d.*

Applicação.— Formar o quadrado do producto $2^3.\ 3.\ 5^2$:

$$(2^3.\ 3.\ 5^2)^2=2^6.\ 3^2.\ 5^4$$
$$=(2^2.\ 3^2).(2^4.\ 5^4)$$
$$=6^2.\ 10^4$$
$$=360000$$

89.—THEOREMA VIII. *O producto de dous factores encerra tantos algarismos quantos houver nesses factores, ou este numero menos um.*

Demonstração.—Sejam 5837 e 523 dous numeros inteiros quaesquer, constando o primeiro de 4 algarismos e o segundo de 3: é necessario demonstrar que o producto $5837 . 523$ encerra, no maximo, $4+3$ algarismos, ou, no minimo, $4+3-1$ algarismos.

O numero 5837 constando de 4 algarismos, é menor do que 10^4 e não póde ser menor do que 10^{4-1}; simelhantemente, o numero 523 tendo 3 algarismos, é menor do que 10^3 e não póde ser menor do que 10^{3-1}: logo, o producto $5837 . 523$ é menor do que $10^4 . 10^3$ ou 10^{4+3} (n. 86) e não póde ser menor do que $10^{4-1} . 10^{3-1}$ ou 10^{4+3-2} (n. 86); porém, 10^{4+3} encerra $4+3+1$ algarismos, e 10^{4+3-2} tem $4+3-1$: portanto o producto $5837 . 553$ contem, no maximo, $4+3$ algarismos, ou, pelo menos, $4+3-1$. *C. q. d.*

§ 2º.—Propriedades da divisão

90.—Theorema I. *Para dividir um producto por qualquer dos seos factores, basta supprimir no producto este factor.*

Demonstração.—Seja p o producto de tres factores, 5, 9 e 3, e supponha-se que queremos dividir p por 9: é preciso demonstrar que basta, para esse fim, supprimir o factor 9 no dicto producto.

Sendo p o producto de 5, 9 e 3, temos

$$p = 5 . 9 . 3;$$

mas, num producto indicado, podemos substituir dous ou mais factores pelo seo producto effectuado (n. 82): portanto, isolando o factor 9, virá

$$p = (5 . 3) . 9.$$

e, deste modo, fica o numero p convertido num producto de dous factores, $(5 . 3)$ e 9; ora, quando o producto de dous factores é dividido por um destes, acha-se o outro (n. 56): logo,

$$p : 9 = 5 . 3.$$

C. q. d.

91.—Corollario. *O quociente da divisão de duas potencias do mesmo numero, uma pela outra, é uma potencia desse numero, e o expoente desta potencia é o excesso do expoente que o numero tem no dividendo sobre o que elle tem no divisor.*

Demonstração.—Sejam 7^8 e 7^3 duas potencias quaesquer do numero 7 e admitta-se que queremos dividir 7^8 por 7^3: vamos mostrar que

$$7^8 : 7^3 = 7^{8-3}$$

Sendo 7^8 e 7^3 potencias do mesmo numero, e sendo tambem $8 > 3$, segue-se que o dividendo 7^8 contem todos os factores do divisor 7^3: logo, para fazer a divisão proposta, é bastante supprimir no dividendo todos os factores que entram no divisor (n. 90); ora, depois de supprimirmos no dividendo 7^8 os 3 factores do divisor 7^3, ficam $8-3$ factores eguaes a 7: logo, o quociente procurado equivale a 7^{8-3}. *C. q. d.*

92.—Theorema II. *Dividir um producto por qualquer numero é o mesmo que dividir por este numero um dos factores (se a divisão for exacta), e multiplicar os outros pelo resultado.*

Demonstração.—Seja p um producto de tres factores, 6,15 e 7, e seja n um numero pelo qual queremos dividir p: vamos provar que, para isso, basta dividir por n um dos tres factores.

Sendo p o producto de 6,15 e 7, tem-se

$$p=6.15.7\ ;$$

mas, admittindo que é exacta, por exemplo, a divisão de 15 por n, tem-se tambem (n. 60)

$$15=n\ q,$$

chamando q o quociente desta divisão ; portanto, substituindo na precedente egualdade o valor de 15, vem

$$p=6.\ n\ q.\ 7;$$

ora, para dividir um producto por um dos seos factores, basta supprimir este factor (n. 90) : logo,

$$p\ :\ n=6.\ 7.\ q$$

93.—THEOREMA III. *Dividir qualquer numero por um producto é o mesmo que divdil-o successivamente por cada um dos factores desse producto.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero e 6.15.7 o producto de diversos factores, 6,15 e 7 : queremos provar que dividindo N por 6,15 e 7, successivamente, obtem-se o mesmo resultado que dividindo N por 6.15.7.

1.° Supponha-se que a divisão de N por 6.15.7 é exacta. Designando por q o quociente dessa divisão, teremos (n. 60)

$$N=6.15.7.\ q\ ;$$

mas, dividindo ambos os membros desta egualdade por 6, ambos os membros da egualdade resultante por 15, etc., virá (n. 90)

$$N:6=15.7.\ q,$$

$$(N:6):15=7.\ q,$$

$$[(N:6):15]:7=q:$$

go, dividindo N por 6, o quociente desta divisão por 5, e este ultimo quociente por 7, obtem-se o mesmo esultado que dividindo N por 6.15.7.

2.° Admitta-se que não é exacta a divisão de N por .15.7. Chamando q o quociente e r o resto dessa diisão, ter-se-ha (n. 60)

$$N=6.15.7.q+r,$$

onde se-deduz, por ser o resto r menor que o divisor .15.7,

$$6.15.7.\ q<N<6.15.7.\ (q+1)\ ;$$

ra, dividindo successivamente por 6, por 15 e por 7, em

$$15.7.\ q<\ N\ :6<\ 15.\ 7.\ (q+1),$$

$$7.\ q<(N\ :6)\ :15<7.\ (q+1),$$

$$q<[(N:6):15]:\ 7\ <q+1:$$

ssim, dividindo N por 6, o quociente desta divisão por 15, e este ultimo quociente por 7, obtem-se para resultado um numero que está comprehendido entre os numeros inteiros consecutivos q e $q+1$, e cuja parte inteira é, por isso, egual a q : ora é tambem q a parte inteira do quociente de N dividido por 6.15.7.

94.—THEOREMA IV. *Se, numa divisão exacta, sem alterar o divisor, multiplicarmos ou dividirmos o dividendo por um numero, o quociente fica multiplicado ou dividido por esse numero.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e q o quociente da divisão de a por b : queremos

demonstrar que, multiplicando ou dividindo a por um certo numero, v. g. 5, o quociente fica multiplicado ou dividido por esse mesmo numero.

Desde-que uma divisão é exacta, o dividendo é equivalente ao producto do divisor pelo quociente (n. 60): logo, multiplicar ou dividir o dividendo a pelo numero 5 é o mesmo que multiplicar ou dividir por este numero o producto $b\,q$; porém, multiplica-se ou divide-se um producto por qualquer numero multiplicando ou dividindo por este numero um dos factores (ns. 83 e 92): logo, se multiplicarmos ou dividirmos por 5 o dividendo a ou $b\,q$, sem alterar o divisor b, ficará o quociente q multiplicado ou dividido por 5. *C. q. d.*

95.—Theorema V. *Se, numa divisão exacta, sem alterar o dividendo, multiplicarmos ou dividirmos o divisor por um numero, o quociente fica dividido ou multiplicado por este numero.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e q o quociente da divisão de a por b: devemos provar que, multiplicando ou dividindo b por um certo numero, 5 por exemplo, o quociente q fica dividido ou multiplicado por esse numero 5.

Sendo exacta uma divisão, o dividendo é egual ao producto do divisor pelo quociente: portanto,

$$a=b\,q;$$

porém, quando multiplicarmos ou dividirmos o factor b por qualquer numero 5, o producto $b\,q$ ou a fica multiplicado ou dividido por 5 (ns. 83 e 92): logo, para que esse producto não se-altere, é necessario dividirmos ou multiplicarmos o outro factor q pelo mesmo numero 5.

96.—Theorema VI. *Se, em qualquer divisão, multiplicarmos ou dividirmos o dividendo e o divisor por um certo numero, o quociente não se-altera; porém, se a divisão for inexacta, o resto fica multiplicado ou dividido por esse mesmo numero.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, q o quociente da divisão de a por b, e r o resto da mesma divisão (se ella for inexacta): vamos provar que, multiplicando ou dividindo a e b por um numero, v. g. 5, o quociente não se-altera, e que, se a divisão de a por b for inexacta, o resto fica multiplicado ou dividido por 5.

Sendo exacta a divisão de a por b, se multiplicarmos ou dividirmos o dividendo por 5, fica o quociente q multiplicado ou dividido por esse numero (n. 94); se, depois, multiplicarmos ou dividirmos o divisor por 5, ficará o novo quociente dividido ou multiplicado por 5 (n. 95); ora, um numero não se-altera quando o multiplicamos ou dividimos por outro e depois dividimos ou multiplicamos por este outro o resultado: logo, o quociente q não se-altera.

Sendo inexacta a divisão de a por b, temos (n. 60)

$$a=bq+r;$$

porém, multiplicando por 5 ambos os membros desta egualdade, vem (ns. 79 e 83)

$$a.\ 5=b.\ 5\times q+r.5,$$

e, pois-que r é menor que b, tambem será $r.\ 5$ menor que $b.\ 5$, isto é, será $r.\ 5$ o resto da divisão de $a.\ 5$ por $b.\ 5$: logo, se multiplicarmos o dividendo a e o divisor b por qualquer numero 5, o quociente não se-altera e o resto fica multiplicado por 5.

Reciprocamente, sendo a, b e r numeros 5 vezes menores que $a.\ 5$, $b.\ 5$ e $r.\ 5$, segue-se que, se dividirmos o dividendo e o divisor por um mesmo numero 5, o quociente não se-altera e o resto fica dividido por 5.

97.—OBSERVAÇÃO.— Mediante o theorema que precede, combinado com o do n. 90, póde-se tornar mais simples a divisão de um numero por outro quando ambos terminam por zeros :—*abstrahe-se de egual numero de zeros no dividendo e no divisor, faz-se a divisão dos numeros resultantes, e á direita do resto final (se o-houver) escreve-se os zeros supprimidos*—.

98.—THEOREMA VII. *O quociente da divisão de um numero por outro encerra tantos algarismos quantos forem os do dividendo menos os do divisor, ou este numero mais um.*

Demonstração.—Supponha-se, em primeiro logar, que se-tem de dividir 73456 por 837 : o quociente constará de 5—3 algarismos, isto é, tantos quantos são os do dividendo menos os do divisor.

O dividendo 73456 está comprehendido entre os productos do divisor 837 por 10 e por 100 : logo, o quociente acha-se entre 10 e 100, e, por isso, não póde ser menor que 10 nem maior que 99 ; ora, ambos estes numeros têm 2 algarismos : portanto, o quociente deve ter 2=5—3 algarismos.

Se considerarmos a divisão de 73456 por 537, provariamos de um modo analogo que o quociente deve ter 3=5—3+1 algarismos.

LIVRO II

PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS Numeros inteiros

CAPITULO I

DIVISIBILIDADE

99.—DIVISIBILIDADE *é a propriedade pela qual um numero contem exactamente outro.*

NUMERO DIVISIVEL por outro OU MULTIPLO de outro *é o numero que contem exactamente esse outro.*—Assim, 12 *é divisivel* por 3 ou é *multiplo* de 3, porque 12 contem 3 exactamente 4 *vezes*.

DIVISOR, SUBMULTIPLO, FACTOR OU PARTE ALIQUOTA de um numero *é outro numero que se-contem exactamente naquelle.*— Assim 3 é *divisor*, *submultiplo*, *factor* ou *parte aliquota* de 12.

100.—Para reconhecer que um numero dado é divisivel por outro, bastaria *effectuar a divisão daquelle numero por este*: logo-que o *resto da divisão* seja egual a *zero*, o quociente completo será numero inteiro, e, portanto, o primeiro numero conterá exactamente o segundo (n. 99). Ha, porém, casos em que se-póde reconhecer a divisibilidade de um numero por outro, quer pela simples inspecção desse numero, quer por meio de operações mais faceis de executar do que a divisão immediata : é desses casos que vamos occupar-nos, de-

monstrando previamente os theoremas que devem servir de base ás nossas indagações.

101.—Theorema I. *O numero que dividir todas as parcellas de uma somma, tambem divide esta somma.*

Demonstração.—Sejam a e b as parcellas de uma somma que representaremos por s, e seja d um numero que divide a e b: queremos demonstrar que d divide s.

Sendo s a somma de a e b, temos

$$s=a+b\,;$$

e sendo a e b divisiveis por d, temos tambem

$$a=d\,q \text{ e } b=d\,q'$$

(q e q' são os quocientes *inteiros* das divisões de a por d e de b por d).

Substituindo na primeira egualdade os valores de a e b, e pondo d em evidencia, virá

$$s=d\,(q+q')\,;$$

por onde se-conclue que d contem-se em s numero exacto de vezes, $q+q'$: logo, d divide s (n. 99) *C. q. d.*

Exemplo:—O numero 3 divide 9 e 15: tambem divide $24=9+15$.

102.—Corollario. *O numero que dividir outro, divide tambem os multiplos desse outro.*

Demonstração.—Seja am qualquer multiplo de a, e seja d um numero que divide a: queremos provar que d divide am.

Por ser am um multiplo de a, teremos (n. 99)

$$am=a+a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a\,;$$

mas, o numero d divide a (pela hyp.): logo, d divide am (n. 101). *C. q. d.*

Exemplo:—O numero 3 divide 12: tambem divide $12.5=60$.

103.—Theorema II. *O numero que não dividir uma das parcellas de uma somma e dividir todas as outras, não divide a somma.*

Demonstração.—Sejam a e b as parcellas de uma somma que representaremos por s, e seja d um numero que divide a e não divide b: vamos demonstrar que d não divide s.

Sendo s a somma de a e b, temos

$$s=a+b\,;$$

e, por ser d divisor de a e não o ser de b, temos ainda

$$a=dq \text{ e } b=dq'+r$$

(q é o quociente inteiro da divisão de a por d, q' e r são o quociente e o resto da divisão de b por d).

Substituindo na primeira egualdade a e b pelos seos valores, e pondo em evidencia d, vem

$$s=d(q+q')+r\,;$$

donde resulta que a divisão de s por d deixa um resto r: logo, d não divide s. *C. q. d.*

Exemplo:—O numero 3 divide 6 e não divide 8: tambem não divide $14=6+8$.

104.—Da comparação dos dous precedentes theoremas resulta que

Para uma somma ser divisivel por um numero, é sufficiente que cada parcella da somma seja divisivel por esse numero.—Esta condição é sufficiente, porque 1.°, se todas as parcellas forem divisiveis pelo numero, a somma tambem o-será (n. 101); 2.°, se uma parcella não for divisivel pelo numero e as outras forem, a somma não o-será (n. 103). (*).

Passemos agora á deducção das condições de divisibilidade por 2 e 5, 4 e 25, 3 e 9, 11, 7, que são as mais faceis de applicar.

105.—Divisibilidade *por 2 e por 5.—1°. O numero que termina por um ou mais zeros é divisivel por 2 e por 5.—2.° Um numero é divisivel por 2 ou por 5 desde-que o ultimo algarismo da direita for divisivel por 2 ou por 5.*

Demonstração.—1.° Seja o numero 790, que termina por *um zero*. Temos

$$790=79.10\ ;$$

ora, 2 e 5 dividem 10, porque 10=2. 5 : logo, 2 e 5 dividem tambem 79.10 ou 790 (n. 102).

2.° Seja dado agora o numero 347. Decompondo este numero em dezenas e unidades simples, temos

$$347=340+7\ ;$$

porém, a primeira parcella é sempre divisivel por 2 e por 5, como se-acaba de provar (1.°): logo, a somma 347 será divisivel por 2 ou por 5 se a segunda parcella, isto é, o ultimo algarismo da direita, tambem o-for (n. 104).

(*) A condição referida não é necessaria, pois-que, segundo mostraremos (n. 114), póde a somma ser divisivel por um numero sem que as parcellas o-sejam.

Observação.—Os algarismos divisiveis por 2 são 2, 4, 6, 8 : chamam-se *algarismos pares*. O unico algarismo divisivel por 5 é 5.

106.—Divisibilidade *por 4 e por 25.—1.° O numero que termina por dous ou mais zeros é divisivel por 4 e por 25.— 2.° Um numero é divisivel por 4 ou por 25 logo-que o numero formado pelos dous ultimos algarismos da direita for divisivel por 4 ou por 25.*

Demonstração.— 1.° Seja o numero 6700, terminado por *dous zeros*. E' evidente que

$$6700=67.100\ ;$$

ora, 4 e 25 dividem 100, porque 100=4.25 : logo, 4 e 25 tambem dividem 67.100 ou 6700 (n. 102).

2.° Seja agora dado o numero 5239. Decomposto o numero dado em suas centenas e uma outra parte formada pelas dezenas e as unidades simples, temos

$$5239=5200+39\ ;$$

mas, a primeira parcella é sempre divisivel por 4 e por 25, conforme está provado (1.°) : portanto, a somma 5239 será divisivel por 4 ou por 25 se a segunda parcella, isto é, o numero formado pelos dous ultimos algarismos da direita, for tambem divisivel por 4 ou por 25 (n. 104).

107.—Divisibilidade *por 3 e por 9.—Um numero é divisivel por 3 ou por 9 quando a somma dos valores absolutos dos seos algarismos for multipla de 3 ou de 9.*

Demonstração.—Seja dado o numero 6598 : vamos primeiro decompôr este numero em duas partes, uma

das quaes será multipla de 3 ou de 9. Evidentemente, temos

$$6598=6000+500+90+8\ ;$$

mas, de outro lado, dividindo por 3 ou por 9 os numeros 1000, 100, 10, 1, temos tambem

$$1000=\textit{mult. de 3 ou de } 9+1,$$
$$100=\textit{mult. de 3 ou de } 9+1,$$
$$10=\textit{mult. de 3 ou de } 9+1,$$
$$1=1,$$

donde se-tira, multiplicando ambos os membros da primeira egualdade por 6, ambos os membros da segunda por 5, ambos os membros da terceira por 9, e ambos os membros da quarta por 8,

$$6000=\textit{mult. de 3 ou de } 9+6,$$
$$500=\textit{mult. de 3 ou de } 9+5,$$
$$90=\textit{mult. de 3 ou de } 9+9,$$
$$8=8:$$

portanto, sommando membro a membro estas quatro egualdades, virá (n. 101)

$$6598=\textit{mult. de 3 ou de } 9+(6+5+9+8).$$

Ficou assim o numero dado decomposto em duas partes, sendo uma dellas multipla de 3 ou de 9, e a outra formada pela somma dos valores absolutos dos algarismos daquelle numero; ora, a primeira destas duas partes é sempre devisivel por 3 ou por 9 (n. 99): logo, a somma 6598 será divisivel por 3 ou por 9 se a segunda parte tambem, o-for (n. 104).

108.—Divisibilidade *por* 11.—*Um numero é divisivel por 11 quando a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos algarismos de ordem par for nulla ou multipla de 11.*

Demonstração.—Seja dado o numero 6598: vamos, antes de tudo, decompôr o numero dado em duas partes, das quaes a primeira será multipla de 11. Temos, evidentemente,

$$6598=6000+500+90+8\ ;$$

porém, dividindo por 11 os numeros 1000, 100, 10, 1, e forçando o quociente (n. 59) quando um resto exceder a 5, ter-se-ha ainda

$$1000=\textit{mult. de } 11-1,$$
$$100=\textit{mult. de } 11+1,$$
$$10=\textit{mult. de } 11-1,$$
$$1=1,$$

donde resulta, multplicando ambos os membros da primeira egualdade por 6, ambos os membros da segunda por 5, ambos os membros da terceira por 9, e ambos os membros da quarta por 8,

$$6000=\textit{mult. de } 11-6,$$
$$500=\textit{mult. de } 11+5,$$
$$90=\textit{mult. de } 11-9,$$
$$8=8:$$

logo, sommando membro a membro estas quatro egualdades, virá (n. 101)

$$6598=\textit{mult. de } 11+[(8+5)-(9+6)]$$

Ficou decomposto em duas partes o numero dado, e uma dessas partes é multipla de 11, ao passo que a outra é a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar (o 1.° e o 3.°) e a dos algarismos de ordem par (o 2.° e o 4.°); mas, a primeira parte é sempre divisivel por 11 (n. 99): por conseguinte, a somma 6598 será divisivel por 11 se tambem o-for a segunda parte (n. 104).

109.—Divisibilidade *por* 7.—*Um numero é divisivel por 7 quando, tendo-se 1.°, repartido esse numero em classes de tres algarismos; 2.°, multiplicado o primeiro algarismo de cada classe por 1, o segundo por 3 e o terceiro por 2; 3.°, sommado separadamente os productos correspondentes ás classes de ordem impar e ás de ordem par, a differença entre a primeira somma e a segunda for nulla ou multipla de 7.*

Demonstração. — Seja dado o numero 843956: tractemos de decompôr este numero em duas partes taes que uma dellas seja multipla de 7. Temos

$$843956 = 800000 + 40000 + 3000 + 900 + 50 + 6;$$

mas, dividindo por 7 os numeros 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1, e forçando o quociente (n. 59) logo que um resto exceda a 3, teremos tambem

$$100000 = mult.\ de\ 7 - 2,$$
$$10000 = mult.\ de\ 7 - 3,$$
$$1000 = mult.\ de\ 7 - 1,$$
$$100 = mult.\ de\ 7 + 2,$$
$$10 = mult.\ de\ 7 + 3,$$
$$1 = 1,$$

donde se-segue, multiplicando ambos os membros da primeira egualdade por 8, ambos os da segunda por 4, ambos os da terceira por 3, ambos os da quarta por 9, ambos os da quinta por 5, e ambos os da sexta por 6,

$$800000 = mult.\ de\ 7 - 8.2,$$
$$40000 = mult.\ de\ 7 - 4.3,$$
$$3000 = mult.\ de\ 7 - 3.1,$$
$$900 = mult.\ de\ 7 + 9.2,$$
$$50 = mult.\ de\ 7 + 5.3,$$
$$6 = 6.1:$$

portanto, sommando membro a membro estas seis egualdades, vem (n. 101)

$$843956 = mult.\ de\ 7 + [(6.1 + 5.3 + 9.2) - (3.1 + 4.3 + 8.2)]$$

Está decomposto em duas partes o numero dado, das quaes a primeira é multipla de 7, sendo a segunda formada pela differença entre o somma dos productos do 1°, 2° e 3° algarismos por 1, 3 e 2, respectivamente, e a somma dos productos do 4°, 5° e 6° algarismos por 1, 3 e 2, respectivamente; ora, a primeira daquellas duas partes é sempre divisivel por 7 (n. 99): portanto, a somma 843956 será divisivel por 7 se a outra parte o-for (n. 101).

110.—Observação.—Para applicar a condição de divisibilidade por 11, temos que tomar a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a somma dos algarismos de ordem par; simelhantemente, para applicar a condição de divisibilidade por 7, devemos tomar a differença entre a somma dos productos

correspondentes ás classes de ordem impar e a somma dos productos correspondentes ás classes de ordem par: em qualquer desses casos, porém, succede ás vezes que *o minuendo é menor do que o subtrahendo*, o que torna a subtracção, arithmeticamente, impossivel. Este embaraço de dous modos se-vence: 1.°, addicionando ao minuendo um multiplo de 11 ou de 7; 2.°, tirando ao subtrahendo um multiplo de 11 ou 7 (este segundo processo é preferivel ás vezes). Existem outros caracteres de divisibilidade, por 13, 17, etc., os quaes, por serem mais longos do que a divisão immediata, é inutil estudal-os aqui.

111.—Vamos agora estabelecer algumas proposições que, mais tarde, nos hão de ser necessarias.

112.—Theorema III. *O numero que dividir a somma de duas parcellas e uma destas, divide tambem a outra.*

Demonstração.—Seja s a somma de duas parcellas a e b, e seja d um numero que divide s e a: vamos provar que d divide b.

Por ser s a somma de a e b, tem-se

$$a+b=s,$$

donde se-deduz, subtrahindo a de ambos os membros,

$$b=s-a;$$

porém, sendo s e a divisiveis por d, tem-se ainda

$$s=dq \text{ e } a=dq':$$

portanto, substituindo estes valores de s e a na segunda egualdade, e pondo d em evidencia, virá

$$b=d(q-q'),$$

por onde se-conclue que b contem d um numero exacto, $q-q'$, de vezes: logo, d divide b. *C. q. d.*

Exemplo:—O numero 7 divide 84 e 49: tambem divide 35=84—49.

113.—Corollario. *O numero que dividir os dous termos de uma differença, tambem divide esta differença.*

Porque, numa subtracção, o minuendo é a somma de duas parcellas, e o subtrahendo é uma dellas, sendo a outra a differença, excesso ou resto (n. 43).

114.—Theorema IV. *Se dividirmos pelo mesmo numero uma somma e cada uma das suas parcellas, a somma dá o mesmo resto que a somma dos restos das parcellas.*

Demonstração.—Sejam a e b as parcellas de uma somma que representamos por s, e seja n um numero qualquer.

Sendo s a somma de a e b, temos

$$s=a+b;$$

porém, admittindo que n não divide exactamente nenhuma das parcellas, e chamando r e r' os restos, ter-se-ha tambem

$$a=nq+r$$
$$b=nq'+r':$$

portanto, substituindo na primeira egualdade os valores de a e b, e pondo n em evidencia, virá

$$s=n(q+q')+(r+r').$$

Ficou a somma s decomposta em duas partes, das quaes a primeira é multipla de n, e a segunda é a somma dos restos das parcellas (*); ora, a primeira dessas partes, sendo dividida por n, não dá resto (n. 99): logo, quando dividirmos ambos os membros da precedente egualdade por n, o resto de s é o mesmo que o resto de $r+r'$, isto é, a somma dá o mesmo resto que a somma dos restos das parcellas. *C. q. d.*

Exemplo:—Dividindo por 11 a somma 108 e as suas parcellas 43 e 65, obtem-se os restos 9, 10 e 10: ora 9= *resto de* (10+10) : 11= *resto de* 20 : 11=9.

115.—Theorema V. *Se dividirmos pelo mesmo numero o producto de dous factores e cada um destes factores, o producto dá o mesmo resto que o producto dos restos dos factores.*

Demonstração.—Sejam a e b os dous factores de um producto que representaremos por p, e seja n um numero qualquer.

Sendo p o producto de a por b, temos

$$p=ab;$$

porém, suppondo que a e b não são divisiveis por n, temos tambem

$$a=n\,q+r,$$
$$b=n\,q'+r',$$

designando r e r' os restos dos factores: logo substituindo na primeira egualdade a e b pelos seos valores, virá

$$p=(n\,q+r).(n\,q'+r'),$$

(*) A somma dos restos r e r' póde ser multipla de n: nesse caso a somma é divisivel por n sem que as parcellas o sejam (Vej. n. 104).

onde resulta, effectuando a multiplicação (n. 80) e ondo n em evidencia,

$$p=n\,(n\,q\,q'+q'\,r+q\,r')+r\,r'.$$

O producto p acha-se decomposto em duas partes, primeira das quaes é multipla de n, e a segunda é o roducto dos restos dos factores; mas, a primeira essas partes, dividida por n não dá resto (n. 99): ›go, dividindo por n ambos os membros da ultima gualdade, o resto de p é o mesmo que o resto de $r\,r'$, to é, o producto dá o mesmo resto que o producto os restos dos factores. *C. q. d.*

Exemplo:—Dividindo por 7 o producto 528 e os ›os factores 48 e 11, acha-se os restos 3, 6 e 4 : ora, =*resto de* (6. 4): 7=*resto de* 24 : 7=3.

116.—Como applicação dos dous theoremas que recedem, vamos apresentar um meio facil de tirar a rova a qualquer das quatro operações fundamentaes, aseado nas condições de divisibilidade, ha pouco estuadas.

Prova da addição.—*Divide-se a somma e cada arcella pelo mesmo numero: se a operação estiver erta, a somma deve dar o mesmo resto que a somma os restos das parcellas.*

Esta regra é consequencia immediata do theoema IV.

Prova da subtracção.—*Divide-se o minuendo, o ubtrahendo e o resto pelo mesmo numero: se a operaão estiver certa, o minuendo ha de dar o mesmo resto ue a somma dos restos do subtrahendo e do resto da peração.*

O minuendo é, com effeito, a somma do subtrahendo e do resto (n. 43).

Prova da multiplicação.—*Divide-se o producto e cada factor pelo mesmo numero: se a operação estiver certa, o producto deve dar o mesmo resto que o producto dos restos dos factores.*

Esta regra é consequencia do theorema V.

Prova da divisão.—*Divide-se o dividendo, o divisor, o quociente e o resto pelo mesmo numero: se a operação estiver certa, o dividendo tem de dar o mesmo resto que o producto dos restos do divisor e do quociente, sommado com o resto da operação* (quando o-houver).

Com effeito, o dividendo é egual ao producto do divisor pelo quociente mais o resto (n. 60).

117.—As quatro regras que precedem obrigam-nos a dividir pelo *mesmo numero* tanto os numeros dados como o resultado da operação. Esse numero, porém, não é inteiramente arbitrario; deve satisfazer a duas condições essenciaes: 1.ª, permittir que, independentemente da divisão, se-possa determinar cada resto; 2.ª, accusar os maiores erros que seja possivel ter commettido na operação. Sob este duplo ponto de vista são preferiveis os divisores 9 e 11 (n. 107 e 108).

CAPITULO II

MAXIMO DIVISOR COMMUM (*)

118.— Divisor commum *é o numero que se-contem exactamente em dous ou mais numeros dados.* O numero 3, por exemplo, que se-contem exactamente em 12 e 18, é um *divisor commum* destes numeros.

119.— Maximo divisor commum *é o maior numero que se-contem exactamente em dous ou mais numeros dados.* Assim é que 6 constitue o *maximo divisor commum* de 12 e 18.

120.—Numeros primos entre si *são aquelles que têm por unico divisor commum a unidade.* Os numeros 4 e 9 estão neste caso.

121.—O processo para achar o maximo divisor commum de dous numeros basêa-se nos theoremas que passamos a provar.

122.—Theorema I. *Se o maior de dous numeros dados for divisivel pelo menor, este ultimo é o maximo divisor commum dos dous numeros.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e admitta-se 1°, que a é maior do que b, e 2°, que a é divisivel por b: queremos provar que b é o maximo divisor commum de a e b. Com effeito, o maximo divisor commum dos numeros propostos não póde exceder o menor delles b, porque então não se-conteria nem uma vez em b; porém, b é divisor commum dos numeros propostos, porque divide a si-mesmo, evidentemente, e divide a, por hypothese: logo, b é o maximo divisor commum de a e b. *C. q. d.*

Exemplo:—Sendo 12 divisivel por 6, podemos affirmar que o maximo divisor commum destes numeros é 6.

123.—Theorema II. *Se o maior de dous numeros dados não for divisivel pelo menor, o maximo divi-*

(*) Por ora sómente nos-occuparemos com a indagação do maximo divisor commum de *dous numeros*, ficando para depois a do maximo divisor commum a *multos numeros* (vej. adeante, n. 156).

sor commum desses numeros é o mesmo que o maximo divisor commum do menor delles e do resto da divisão do maior pelo menor.

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e supponha-se 1°, que a é maior do que b, e 2°, que a não é divisivel por b: representando por r o resto da divisão de a por b, vamos demonstrar que o maximo divisor commum de a e b é o mesmo que o maximo divisor commum de b e r. Com effeito: sendo q o quociente da divisão de a por b, temos (n. 60)

$$a=bq+r.$$

Posta esta egualdade, argumentamos do modo seguinte: todo divisor commum de a e de b é divisor commum de b e de r, porque, dividendo b, divide bq (n. 102), e, dividindo a e bq, divide r (n. 112); assim tambem, todo divisor commum de b e de r é divisor commum de a e de b, porque, dividindo b, divide bq (n. 102), e, dividindo bq e r, divide a (n. 101): por consequencia, todos os divisores communs de a e b são egualmente divisores communs de b e r. Logo, etc. *C. q. d.*

124.—Procurar o maximo divisor commum de dous numeros.—Esta questão resolve-se com o auxilio dos theoremas que precedem.—Admitta-se que a questão proposta é a seguinte:

Procurar o maximo divisor commum de 7524 *e* 918.—Se o numero 7524 for divisivel por 918, este ultimo numero será o maximo divisor commum procurado (n. 122); ora, para reconhecer se um numero é divisivel por outro, é necessario (em geral) effectuar a

divisão daquelle numero por este: logo, divide-se o numero maior 7524 pelo menor 918, e tem-se

$$\begin{array}{r|l} 7524 & 918 \\ \hline 180 & 8 \end{array}$$

Effectuada a divisão do numero maior pelo menor, reconhece-se que esta divisão não se-effectua exactamente, porque aparece um resto egual a 180; porém, quando um numero não é divisivel por outro, o maximo divisor commum desses dous numeros é o mesmo que o maximo divisor commum do menor delles e do resto da divisão do maior pelo menor (n. 123): conseguintemente, a questão que pretendiamos resolver acha-se convertida em outra mais simples: *Procurar o maximo divisor commum de* 918 *e* 180.

Reproduzindo argumento analogo ao que precede, seremos levados ás seguintes divisões parciaes:

$$\begin{array}{r|l} 918 & 180 \\ \hline 18 & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 18 \\ \hline 0 & 10 \end{array};$$

e como o *segundo resto* 18 *é divisor exacto do primeiro*, é este segundo resto o maximo divisor commum que se-procurava.

Analysando os precedentes raciocinios deduz-se a

Regra.—*Para procurar o maximo divisor commum de dous numeros, divide-se o numero maior pelo menor: se a divisão se-fizer exactamente, o menor dos dous numeros é o maximo divisor commum pedido; se a divisão não se-fizer exactamente, divide-se o numero menor pelo primeiro resto, depois o primeiro resto pelo segundo,*

o segundo pelo terceiro, etc., *até achar um resto que divida exactamente o que precede.*

A disposição do calculo é a seguinte:

7524	918	180	18	0
	8	5	10	

125.—Observação.—Determinando o maximo divisor commum de dous numeros, podemos, muitas vezes, dispensar-nos de ir além de uma certa divisão parcial. Com effeito, estando provado (n. 123) que o maximo divisor commum de dous numeros é o mesmo que o maximo divisor commum do menor delles e do resto da divisão do maior pelo menor, e podendo este theorema applicar-se, com egual valor, ao numero menor comparado com o primeiro resto, ao primeiro resto comparado com o segundo, etc., é licito concluir que —*O maximo divisor commum de dous numeros é o mesmo que o maximo divisor commum de dous restos consecutivos quaesquer.*—Isto posto, desde-que se-chegar a dous restos consecutivos cujo maximo divisor commum se-reconheça á *simples vista*, é inutil proseguir o calculo; porque (segundo acabamos de mostrar) esse mesmo numero é o maximo divisor commum dos dous numeros propostos, o qual fica assim facilmente determinado. Um exemplo para esclarecer a presente observação:

845	743	102	29	15	14	1	0
	1	7	3	1	1	14	

Neste exemplo, em chegando á 3.ª divisão parcial, acha-se para resto o numero 15, cujos factores facilmente se-reconhece serem 3 e 5; e como nenhum destes factores divide 29, os restos consecutivos 29 e 15

têm por unico divisor commum a unidade: o mesmo succede aos numeros dados 845 e 743, e, pois, estes numeros são primos entre si (n. 120).

126.—Nos theoremas que seguem vem expressas algumas propriedades do maximo divisor commum de dous numeros, as quaes nos hão de ser uteis mais tarde.

127.—Theorema III. *O numero que dividir dous outros, divide tambem o maximo divisor commum desses outros.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e seja d um divisor commum daquelles dous numeros: queremos provar que d divide o maximo divisor commum de a e b. Com effeito: admitta-se que procurámos o maximo divisor commum a a e b (n. 124), e que são $q, q', q'', \ldots\ldots$ os quocientes e $r, r', r'', \ldots\ldots$ os restos das diversas divisões parciaes; teremos (n. 60)

$$a=bq+r$$
$$b=rq'+r'$$
$$r=r'q''+r''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Suppostas as precedentes relações, eis-aqui o nosso argumento. 1.° Todo numero que dividir a e bq, divide tambem r (n. 112); mas, d divide a e b (segundo a hypothese), e se d divide b tambem divide bq (n. 102): logo, d divide r. 2.° Todo numero que dividir b e rq', divide tambem r' (n. 112); ora, d divide b (pela hypothese) e r (1.°), e se d divide r tambem divide rq' (n. 102): portanto, d divide r'. 3.° Todo numero que dividir r e $r'q''$, tambem divide r'' (n. 112); porém, d

divide r (1.°) e r' (2.°), e se d divide r' tambem divide $r'q''$ (n. 102): conseguintemente, d divide r''. De um modo analogo se-demonstraria que d divide *todos* os demais restos; ora, o maximo divisor commum de a e b é um desses restos (o penultimo): logo, d divide aquelle maximo divisor commum. *C. q. d.*

128.—Theorema IV. *O numero que dividir o maximo divisor commum de dous numeros dados, tambem divide esses numeros.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros e D o seo maximo divisor commum: se um numero qualquer d for divisor exacto de D, affirmamos que tambem o-é de a e b. Com effeito: o numero que dividir outro, divide tambem os multiplos desse outro (n. 102); ora a e b são multiplos do seo maximo *divisor* commum: logo, d divide a e b. *C. q. d.*

Como exemplo do theorema e da sua reciproca (*), sejam 156 e 132 dous numeros cujo maximo divisor commum é 12: 1.°, o numero 3, que divide 156 e 132, divide 12; reciprocamente, 2.°, o numero 3, que divide 12, divide tambem 156 e 132.

129.—Theorema V. *Quando se-multiplica ou se-divide dous numeros por um terceiro, o maximo divisor commum desses numeros fica multiplicado ou dividido pelo terceiro.*

Demonstração.—Sejam a, b, e n tres numeros quaesquer: vamos provar que, se a e b forem multiplicados ou divididos por n, o maximo divisor commum

(*) *Reciproca de um theorema* é outro theorema em que a these do primeiro é tomada para hypothese, e vice-versa.

de a e b ficará tambem multiplicado ou dividido por n. Com effeito: supponha-se que procurámos o maximo divisor commum de a e b, e que são $r, r', r'', \ldots$ os restos das differentes divisões parciaes; dispondo em uma mesma linha horizontal o *dividendo*, o *divisor* e o *resto* de cada divisão, tem-se

$a, b, r,$
$b, r, r',$
$r, r', r'',$
....
....

Quando, numa divisão que não se-effectua exactamente, multiplicamos ou dividimos o dividendo e o divisor por um terceiro numero, o resto da divisão fica multiplicado ou dividido por esse terceiro numero (n. 96): por conseguinte, 1°, se multiplicarmos ou dividirmos a e b por n, tambem r fica multiplicado ou dividido por n; 2°, b está multiplicado ou dividido por n (hypothese) e r tambem o-está (1.°): logo, r', resto da segunda divisão parcial, fica multiplicado ou dividido por n; 3°, r e r' estão multiplicados ou divididos por n (1.° e 2.°): logo, r'', resto da terceira divisão parcial, fica multiplicado ou dividido por n. Raciocinando analogamente, provar-se-ha que, se multiplicarmos ou dividirmos a e b por n, *todos* os restos $r, r', r'', \ldots$ ficam multiplicados ou divididos por n; ora, o maximo divisor commum de a e b é o penultimo desses restos: portanto, etc. *C. q. d.*

Exemplo:—O maximo divisor commum de 12 e 18 é 6; se, porém, multiplicarmos 12 e 18 por 5, o maximo divisor commum dos numeros resultantes 60 e 90 fica sendo $30=6\times5$.

130.—THEOREMA VI. *Quando se-divide dous numeros pelo seo maximo divisor commum, os quocientes resultantes são numeros primos entre si.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros quaesquer, e D o seo maximo divisor commum; admitta-se que, fazendo a divisão de a e de b por D, achou-se os quocientes q e q': vamos demonstrar que q e q' são numeros primos entre si. Com effeito: dous numeros são primos entre si quando o seo unico divisor commum é a unidade; ora, dividindo a e b por D (n. 129), os quocientes q e q' têm por maximo divisor commum $D : D=1$: logo, os quocientes q e q' são primos entre si.

C. q. d.

Exemplo:—Dividindo-se 12 e 18 pelo seo maximo divisor commum 6, teremos os numeros 2 e 3, que são primos entre si.

CAPITULO III

NUMEROS PRIMOS

131.—NUMERO PRIMO *é o numero divisivel sómente por si e pela unidade.*—O numero 5, por exemplo, não sendo divisivel por 2, 3 ou 4, mas unicamente por 5 e por 1, é numero primo.

A theoria dos numeros primos é uma das mais importantes da Arithmetica por causa das muitas applicações que tem, segundo veremos.

132.—THEOREMA I. *O numero que não for primo, admitte pelo menos um divisor primo.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero não

primo: queremos demonstrar que N tem pelo menos um divisor primo.

Não sendo N numero primo, admitte dous ou mais divisores differentes de N e de 1 (n. 131); seja D o *menor* destes divisores: se D não é numero primo, póde-se encontrar um numero que, dividindo D, tambem divide o seo multiplo N (n. 102); ora, isso não é possivel, porque se-suppoz que D é o *menor* dos divisores de N maiores que 1: logo, D é numero primo. *C. q. d.*

133.—THEOREMA II. *Dous numeros que não forem primos entre si, admittem pelo menos um divisor primo commum.*

Demonstração.—Sejam N e N' dous numeros não primos entre si: vai-se provar que N e N' admittem pelo menos um divisor primo commum.

Uma vez que N e N' não são numeros primos entre si, elles têm um ou mais divisores communs differentes de 1 (n. 120); seja D um desses divisores: se D não for numero primo, admitte pelo menos um divisor primo (n. 131), o qual, dividindo D, tambem divide os seos multiplos N e N'. *C. q. d.*

134.—THEOREMA III. *A serie dos numeros primos é illimitada.*

Demonstração.—Seja n um numero primo qualquer: é preciso demonstrar que, por maior que seja n, existe um outro numero primo maior do que n.

Representando por p o producto dos numeros inteiros consecutivos $1, 2, 3, \ldots\ldots n$, tem-se

$$p = 1.2.3.\ldots\ldots n,$$

e junctando-se 1 ao dous membros desta egualdade, vem

$$p+1=1.2.3......n+1$$

Se $p+1$ fosse numero primo, ficaria provado o theorema, porque, evidentemente, $p+1$ é maior do que n: admitta-se, pois, que $p+1$ não é numero primo. Se $p+1$ não é numero primo, admitte pelo menos um divisor primo (n. 131); mas, p e $p+1$, por serem numeros inteiros consecutivos, não têm outro divisor commum senão a unidade: logo, por isso que os divisores de p são $1,2,3,.....n$, o divisor primo de $p+1$ é maior do que n.

C. q. d.

135.—Theorema IV. *E' primo todo o numero que não for divisivel por nenhum dos numeros primos cujo quadrado não exceda esse numero.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero e a o menor dos numeros primos cujo quadrado excede N; admitta-se que N não é divisivel por nenhum dos numeros primos menores de que a: vai-se provar que N é numero primo.

1.° O numero N não póde ser divisivel por nenhum numero d, não primo e menor do que a; porque o numero d admitte pelo menos um divisor primo (n. 132), e este divisor primo de d tambem dividiria N (n. 102): o que é contrario á nossa hypothese.

2.° O numero N não póde tambem ser divisivel por a nem por outro numero primo que exceda a. Não póde N ser divisivel por a, porque, se o-fosse, teriamos

$$N=a\,q,$$

sendo q um numero inteiro que divide N (n. 60); porém, segundo a nossa hypothese, temos

$$N<a^2$$

donde resulta, dividindo por a,

$$N:a<a,$$

ou

$$q<a:$$

portanto, se N fosse divisivel por a, tambem o-seria por um numero q menor do que a; o que já mostramos (1.°) ser impossivel. Não póde N ser divisivel por um numero primo que exceda a; porque, sendo d' esse numero, teriamos

$$N=d'q',$$

e, combinando esta egualdade com a precedente, viria

$$d'q'=aq;$$

ora, d' é, por hypothese, maior que a: logo, para que esta egualdade tenha logar, é necessario que seja

$$q'<q,$$

e como q é menor do que a (provámol-o ha pouco), segue-se que

$$q'<a:$$

por conseguinte, se N fosse divisivel por um numero primo d' maior do que a, tambem o-seria por um numero q' menor do que a; o que não póde ser (1.°): logo, N tem por unicos divisores N e 1, e é, pois, numero primo.

C. q. d.